01037 Løsninger til opgave 2

Preben Alsholm

Oktober 2006

1. Vi skal afgøre om rækken er konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$$

Da

$$\frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+1} \to \infty$$

for $n \to \infty$ har vi, at det n'te led i den givne række ikke går mod nul $n \to \infty$. Derfor er rækken ifølge n'te-ledskriteriet divergent.

2. Vi skal afgøre om rækken er konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$$

Vi bruger kvotientkriteriet:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{(n+1)}(n+1)!}}{\frac{n^n}{\pi^n n!}} &= \frac{(n+1)^{n+1}\,\pi^n n!}{\pi^{(n+1)}\,(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n}{\pi n^n} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{\pi} \end{aligned}$$

for $n \to \infty$. Her har vi brugt et resultat, der blev vist ved en forelæsning. Da $\frac{e}{\pi} < 1$ er rækken konvergent.

3. Vi skal vise, at rækken er konvergent:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

og ved brug af Korollar 4.21 finde summen med en fejl på højst $5 \cdot 10^{-3}$.
Vi bruger integralkriteriet. Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

for $x \geq 2$. Funktionen er kontinuert og har positive værdier. Desuden er den aftagende, da

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln^3 x} (\ln x + 2) < 0$$

for $x \geq 2$. Vi undersøger nu det uegentlige integral

$$\int_2^\infty f(x)\, dx = \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Vi finder

$$\int_2^t \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^t = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t} \to \frac{1}{\ln 2}$$

for $t \to \infty$. Altså er $\int_2^\infty f(x)\, dx$ konvergent. Ifølge integralkriteriet er da også den givne række konvergent.
Ifølge Korollar 4.21 har vi for $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) + \int_{N+1}^\infty f(x)\, dx < \sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \sum_{n=2}^{N} f(n) + \int_{N+1}^\infty f(x)\, dx + f(N+1)$$

I vores tilfælde bliver det

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{\ln(N+1)} \\ < \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \\ < \quad & \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{\ln(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(\ln(N+1))^2} \end{aligned}$$

Et bud på værdien af integralet er nu gennemsnittet af øvre og nedre grænse for det interval, hvori rækkens sum åbenbart ligger. Dette interval har længden

$$\frac{1}{(N+1)(\ln(N+1))^2}$$

Så fejlen ved at angive midterpunktet af intervallet som værdien af summen er højst halvdelen heraf. Men denne fejl skal være højst $5 \cdot 10^{-3}$, så vi må forlange

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(N+1)(\ln(N+1))^2} \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

Da f er aftagende, kan vi nøjes med at bestemme det N for hvilket der er lighed. Vha. Maple findes $N = 13.2$, men vi må så tage $N = 14$. Med denne værdi findes

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{\ln(N+1)} = 2.105109745$$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{\ln(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(\ln(N+1))^2} = 2.114200403$$

Summen er dermed

$$2.11 \pm 0.005$$

4. Vi skal afgøre om rækkerne er konvergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!} \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n!}{(1+n)!}$$

Idet jo $\frac{1+n!}{(1+n)!}$ for store værdier af n tilnærmelsesvist er $\frac{n!}{(1+n)!} = \frac{1}{n}$ sammenligner vi den først givne række med den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\frac{1+n!}{(1+n)!} \geq \frac{n!}{(1+n)!} = \frac{1}{n}$$

gældende for alle $n \geq 1$. Da den harmoniske række er divergent, er også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}$ divergent.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n!}{(1+n)!}$ er alternerende. Vi undersøger, om Leibniz' kriterium kan anvendes, idet vi lader $b_n = \frac{1+n!}{(1+n)!}$. Vi skal altså undersøge, om $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$ (altså går aftagende mod nul). Da vi har

$$\frac{1+n!}{(1+n)!} \leq 2\frac{n!}{(1+n)!} = \frac{2}{n}$$

for $n \geq 1$, ses at $b_n \to 0$ for $n \to \infty$. Vi skal nu vise, at følgen er aftagende og betragter derfor differensen mellem to på hinanden følgende led:

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= \frac{1+n!}{(1+n)!} - \frac{1+(n+1)!}{(1+(n+1))!} = \frac{(1+n!)(2+n) - (1+(n+1)!)}{(2+n)!} \\ &= \frac{n!+n+1}{(2+n)!} > 0 \end{aligned}$$

Vi konkluderer, at $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ er en aftagende følge, der går mod nul. Leibniz' kriterium giver så, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n!}{(1+n)!}$ er konvergent. Konvergensen er i øvrigt betinget, da rækken af absolutværdier jo er divergent.