Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

4. september 2006 (revideret 5/9)

1.1 Introduktion

Lineær differentialligning af n'te orden

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t)\,, \quad t \in I$$

Den tilsvarende homogene ligning

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

Udtrykket til venstre kan opfattes som en differentialoperator

$$D_n = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n$$

anvendt på y:

$$D_n y = a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y$$

Eksempel 1.1 og 1.2 i Maple.

Den homogene ligning

Differentialoperatoren $D_n$er lineær i følgende forstand

$$D_n\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = c_1 D_n\left(y_1\right) + c_2 D_n\left(y_2\right)$$

når c_1 og c_2 er konstanter.
Heraf følger, at mængden af løsninger til den homogene ligning $D_n y = 0$ udgør et vektorrum (nulrummet for D_n).
Det kan vises, at dette vektorrum er n-dimensionalt (Sætning 1.4).

Karakterligningen

Løsninger af formen $y(t) = e^{\lambda t}$ fås netop, når λ er rod i karakterligningen

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Theorem (1.12 Homogen lineær ligning)

1. *En reel rod λ af multiplicitet p giver anledning til løsningerne*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{p-1}e^{\lambda t}$$

2. *De imaginære rødder $\lambda = \alpha \pm i\omega$ af multiplicitet p giver anledning til løsningerne*

$$e^{\alpha t}\cos\omega t, e^{\alpha t}\sin\omega t, te^{\alpha t}\cos\omega t, te^{\alpha t}\sin\omega t,$$
$$\ldots, t^{p-1}e^{\alpha t}\cos\omega t, t^{p-1}e^{\alpha t}\sin\omega t$$

Den fuldstændige løsning fås som samtlige linearkombinationer af løsningerne under 1 og 2.

Eksempler

Se Maple for eksemplerne 1.6, 1.8, 1.9, 1.13 og 1.14.

1.3 Den inhomogene ligning

Theorem (1.16)

Struktursætningen. Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t)$$

kan skrives som summen af en partikulær løsning (y_p) *til den inhomogene ligning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning* (y_{hom})

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

$$y = y_p + y_{\text{hom}}$$

Eksempel i Maple.

1.4 Overføringsfunktioner, typen af differentialligninger

Vi betragter nu differentialligninger af formen

$$
\begin{aligned}
& a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \\
= \quad & b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u
\end{aligned}
$$

Altså af formen

$$D_n^a y = D_m^b u$$

Her skal u opfattes som input til det tilsvarende fysiske system (påvirkningen) og y skal betragtes som output.
Maple: Eksempel 1.18.

1.4 Overføringsfunktioner, Definition

Med $u(t) = e^{st}$ søger vi en løsning af formen ce^{st}, hvor c er en konstant, der dog kan (vil) afhænge af s, så vi betegner den med $H(s)$. Denne størrelse kaldes overføringsfunktionen for differentialligningen (systemet). Løsningen $y(t) = H(s)\,e^{st}$ kaldes det stationære svar på påvirkningen e^{st}. Overføringsfunktionen bliver åbenbart lig med forholdet mellem karakterpolynomierne for de to sider:

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Eksempel 1.20 i Maple.

1.5 Frekvenskarakteristikker

Vi betragter nu tilfældet $s = i\omega$. Vi kan skrive

$$\begin{aligned} H(i\omega)\, e^{i\omega t} &= |H(i\omega)|\, e^{i(ArgH(iw)+\omega t)} \\ &= |H(i\omega)| \left(\cos(\omega t + ArgH(i\omega)) + i \sin(\omega t + ArgH(i\omega))\right) \end{aligned}$$

Hvis derfor $u(t) = \cos(\omega t)$, så er det stationære svar

$$y(t) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + ArgH(i\omega))$$

Funktion A givet ved

$$A(\omega) = |H(i\omega)|$$

for alle $\omega \geq 0$ kaldes amplitudekarakteristikken, og funktionen ϕ defineret ved

$$\phi(\omega) = Arg(H(i\omega))$$

for alle $\omega \geq 0$ kaldes fasekarakteristikken.

Nyquist plot

Et Nyquist plot er et plot af $H\left(i\omega\right)$ i den komplekse plan. Eksempel 1.23 i Maple.