Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

11. september 2006

2.1 Introduktion

Lineært differentialligningssystem af første orden

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + u_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + u_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + u_n(t)
\end{aligned}$$

Vi skal overalt i det følgende antage, at $a_{ij} \in R$. På matrix-vektorform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

Maple: Eksempel 2.1.

Omskrivning af n'te ordens differentialligning til system af første orden

Betragt en normeret lineær differentialligning af n'te orden

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = u(t)$$

Sæt $x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}$ så fås systemet

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\
\dot{x}_n(t) &= -b_n x_1(t) - b_{n-1} x_2(t) - \ldots - b_1 x_n(t) + u(t)
\end{aligned}$$

med koefficientmatrix på næste side:

Omskrivningen fortsat

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u \end{pmatrix}
$$

Maple Eksempel 2.2.

Den homogene ligning: A diagonaliserbar

Antag, at $n \times n$-matricen A er diagonaliserbar. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være n lineært uafhængige egenvektorer hørende til egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. *Den fuldstændige komplekse løsning* til det homogene system $\dot{x} = Ax$ er da

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \tag{1}$$

hvor $c_1, c_{2,} \ldots, c_n \in C$.
Den fuldstændige reelle løsning fås således.

- Bidragene fra reelle egenværdier er som ovenfor i (1).
- Hvis egenværdien λ_k er imaginær og $\lambda_r = \overline{\lambda_k}$ så erstattes bidraget $c_k e^{\lambda_k t} v_k + c_r e^{\lambda_r t} v_r$ i (1) med følgende bidrag

  $$c_k \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_k t} v_k\right) + c_r \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_k t} v_k\right)$$

  og alle konstanterne $c_1, c_{2,} \ldots, c_n \in R$. Maple Eksempel 2.4, 2.6, 2.7.

2.2 Den homogene ligning: A ikke diagonaliserbar

Antag, at egenværdien λ har algebraisk multiplicitet $p = 2$, men geometrisk multiplicitet 1, så er matricen A ikke diagonaliserbar. Den fuldstændige komplekse løsning til $\dot{x} = Ax$ opnås da som følger.

- Bidragene fra de egenværdier, for hvilke *algebraisk multiplicitet* = *geometrisk multiplicitet* er som før.
- Lad v være en egenvektor hørende til λ. Nulrummet $N(A - \lambda I)$ er endimensionalt, men nulrummet $N\left((A - \lambda I)^2\right)$ er 2-dimensionalt. Find en basis for $N\left((A - \lambda I)^2\right)$ ved at begynde med v og tilføje en løsning u til ligningen
$$(A - \lambda I)\, u = v$$
- Egenværdien λ bidrager nu til den fuldstændige komplekse løsning med leddet
$$c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t} (u + tv)$$

  Maple Eksempel 2.10.

Betragt $\dot{x} = Ax$, hvor A er $n \times n$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være n lineært uafhængige løsningsvektorer. Den fuldstændige løsning er

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n x_n(t)$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$. Lad $\Phi(t)$ være matricen, hvis søjler er $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, altså

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \end{bmatrix}$$

$\Phi(t)$ kaldes en fundamentalmatrix for $\dot{x} = Ax$.
Den fuldstændige løsning kan skrives

$$x(t) = \Phi(t)\, c$$

hvor c er søjlevektoren bestående af $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

2.3 Fundamentalmatricen II

Fundamentalmatricen opfylder differentialligningen $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ da

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) & \frac{d}{dt}x_2(t) & \dots & \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ax_1(t) & Ax_2(t) & \dots & Ax_n(t) \end{bmatrix} \\
&= A\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix} = A\Phi(t)
\end{aligned}$$

Dens inverse opfylder differentialligningen $\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A$ da

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}\Phi\right) = \left(\frac{d}{dt}\Phi^{-1}\right)\Phi + \Phi^{-1}\left(\frac{d}{dt}\Phi\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\Phi^{-1}\right)\Phi + \Phi^{-1}A\Phi
\end{aligned}$$

Maple Eksempel 2.12 mm.

2.4 Den inhomogene ligning I

Vi betragter ligningen

$$\dot{x} = Ax + u$$

hvor u er en vektor, der kan afhænge af t.
På grund af lineariteten gælder struktursætningen:
Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning fås ved til en partikulær løsning at lægge den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.
En partikulær løsning kan i simple tilfælde findes ved et kvalificeret gæt.
Maple Eksempel 2.16, 2.17.

2.4 Den inhomogene ligning II. Generel løsningsformel

Vi udleder en generalisering af Panserformlen. Af ligningen $\dot{x} = Ax + u$ følger

$$\Phi^{-1}\dot{x} - \Phi^{-1}Ax = \Phi^{-1}u$$

Men da

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A$$

ses det, at

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}x\right) = \Phi^{-1}\dot{x} - \Phi^{-1}Ax = \Phi^{-1}u$$

Ved ubestemt integration fås

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,u(t)\,dt$$

Ved bestemt integration fra t_0 til t fås

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

hvor i den sidste version $c = \Phi^{-1}(t_0)\,x(t_0)$. Maple Eksempel 2.20 mm.