Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

18. september 2006

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.

- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{1}$$

  hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- Maple: 2.6 Indledning med eksemplificering fra n'te ordens differentialligning.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer II

- Vi lader $u(t) = e^{st}$ og spørger, om systemet (1) har en løsning i x af formen $x(t) = e^{st}x_0$.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer II

- Vi lader $u(t) = e^{st}$ og spørger, om systemet (1) har en løsning i x af formen $x(t) = e^{st}x_0$.
- Ved indsættelse i (1) fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{st}x_0\right) &= A\left(e^{st}x_0\right) + be^{st} \\ se^{st}x_0 &= e^{st}Ax_0 + be^{st} \end{aligned}$$

altså må vi kræve $(A - sI)\,x_0 = -b$.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer II

- Vi lader $u(t) = e^{st}$ og spørger, om systemet (1) har en løsning i x af formen $x(t) = e^{st}x_0$.
- Ved indsættelse i (1) fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{st}x_0\right) &= A\left(e^{st}x_0\right) + be^{st} \\ se^{st}x_0 &= e^{st}Ax_0 + be^{st} \end{aligned}$$

  altså må vi kræve $(A - sI)\,x_0 = -b$.
- Når s ikke er en egenværdi for A (altså når $\det(A - sI) \neq 0$), så er der præcis én løsning for x_0, nemlig

$$x_0 = -(A - sI)^{-1}\,b$$

2.6 Overføringsfunktioner for systemer II

- Vi lader $u(t) = e^{st}$ og spørger, om systemet (1) har en løsning i x af formen $x(t) = e^{st}x_0$.
- Ved indsættelse i (1) fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{st}x_0\right) &= A\left(e^{st}x_0\right) + be^{st} \\ se^{st}x_0 &= e^{st}Ax_0 + be^{st} \end{aligned}$$

  altså må vi kræve $(A - sI)\, x_0 = -b$.
- Når s ikke er en egenværdi for A (altså når $\det(A - sI) \neq 0$), så er der præcis én løsning for x_0, nemlig

$$x_0 = -(A - sI)^{-1}\, b$$

- Når s er en egenværdi, er der enten ingen løsninger til $(A - sI)\, x_0 = -b$ eller uendeligt mange.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer III

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

hvor

$$H(s) = -c^{T}(A - sI)^{-1}\, b$$

2.6 Overføringsfunktioner for systemer III

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

hvor

$$H(s) = -c^T (A - sI)^{-1}\, b$$

- Frekvenskarakteristikkerne (amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken) defineres som tidligere som de polære koordinater for $H(i\omega)$:

$$H(i\omega) = A(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}$$

2.6 Overføringsfunktioner for systemer III

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

hvor

$$H(s) = -c^T (A - sI)^{-1}\, b$$

- Frekvenskarakteristikkerne (amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken) defineres som tidligere som de polære koordinater for $H(i\omega)$:

$$H(i\omega) = A(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}$$

- Altså

$$A(\omega) = |H(i\omega)|, \quad \phi(\omega) = Arg(H(i\omega))$$

hvor $\omega > 0$.

2.6 Overføringsfunktioner for systemer III

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\,e^{st}$$

hvor

$$H(s) = -c^T (A - sI)^{-1}\, b$$

- Frekvenskarakteristikkerne (amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken) defineres som tidligere som de polære koordinater for $H(i\omega)$:

$$H(i\omega) = A(\omega)\,e^{i\phi(\omega)}$$

- Altså

$$A(\omega) = |H(i\omega)|\,, \quad \phi(\omega) = Arg(H(i\omega))$$

hvor $\omega > 0$.

- Eksempel 2.22 og 2.24 i Maple

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Definition.

Betragt det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

- Systemet (2) kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, dvs. hvis der findes en konstant K, så $\|x(t)\| \leq K$ for alle $t \geq 0$.

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Definition.

Betragt det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

- Systemet (2) kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, dvs. hvis der findes en konstant K, så $\|x(t)\| \leq K$ for alle $t \geq 0$.
- Systemet (2) kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Definition.

Betragt det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

- Systemet (2) kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, dvs. hvis der findes en konstant K, så $\|x(t)\| \leq K$ for alle $t \geq 0$.
- Systemet (2) kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Bemærkning: For et lineært system er det nok at forlange $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$ for asymptotisk stabilitet (men ikke for et ulineært!).

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Definition.

Betragt det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

- Systemet (2) kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, dvs. hvis der findes en konstant K, så $\|x(t)\| \leq K$ for alle $t \geq 0$.
- Systemet (2) kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \longrightarrow 0$ for $t \longrightarrow \infty$.
- Bemærkning: For et lineært system er det nok at forlange $x(t) \longrightarrow 0$ for $t \longrightarrow \infty$ for asymptotisk stabilitet (men ikke for et ulineært!).
- Er et system ikke stabilt kaldes det ustabilt.

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Definition.

Betragt det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

- Systemet (2) kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, dvs. hvis der findes en konstant K, så $\|x(t)\| \leq K$ for alle $t \geq 0$.
- Systemet (2) kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Bemærkning: For et lineært system er det nok at forlange $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$ for asymptotisk stabilitet (men ikke for et ulineært!).
- Er et system ikke stabilt kaldes det ustabilt.
- Eksempel 2.27, 2.28, 2.29 i Maple.

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Kriterium.

Det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax$$

- er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Kriterium.

Det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax$$

- er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis
- enhver egenværdi λ med $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ har samme algebraisk og geometrisk multiplicitet.

2.7 Stabilitet for homogene systemer. Kriterium.

Det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax$$

- er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis
- enhver egenværdi λ med $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ har samme algebraisk og geometrisk multiplicitet.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er asymptotisk stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Det homogene lineære system

$$\dot{x} = Ax$$

- er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis
- enhver egenværdi λ med $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ har samme algebraisk og geometrisk multiplicitet.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er asymptotisk stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.
- Eksempel 2.35, 2.36 i Maple.

Routh-Hurwitz' kriterium

- Betragt polynomiet
$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$
med alle koefficienter reelle og med $a_0 > 0$ (bogen har $a_0 = 1$). Alle rødderne har negativ realdel netop når

Routh-Hurwitz' kriterium

- Betragt polynomiet

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

med alle koefficienter reelle og med $a_0 > 0$ (bogen har $a_0 = 1$). Alle rødderne har negativ realdel netop når

- alle koefficienterne er positive og når desuden determinanten

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \ldots & a_{2k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k \end{vmatrix}$$

er positiv for alle $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Ovenfor skal a_p forstås som 0, hvis $p > n$.

Routh-Hurwitz' kriterium

- Betragt polynomiet

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

med alle koefficienter reelle og med $a_0 > 0$ (bogen har $a_0 = 1$). Alle rødderne har negativ realdel netop når

- alle koefficienterne er positive og når desuden determinanten

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \ldots & a_{2k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k \end{vmatrix}$$

er positiv for alle $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Ovenfor skal a_p forstås som 0, hvis $p > n$.

- Maple-illustration af Routh-Hurwitz' kriterium og Eksempel 2.41.