Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

25. september 2006

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og $u(t)$ er en tidsafhængig søjlevektor.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \tag{1}$$

  hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og $u(t)$ er en tidsafhængig søjlevektor.

- Systemet (1) siges at være asymptotisk stabilt,hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder

$$x_1(t) - x_2(t) \to 0 \text{ for } t \to \infty$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \tag{1}$$

  hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og $u(t)$ er en tidsafhængig søjlevektor.

- Systemet (1) siges at være asymptotisk stabilt,hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder

$$x_1(t) - x_2(t) \longrightarrow 0 \text{ for } t \longrightarrow \infty$$

- Da forskellen mellem to løsninger til det inhomogene system løser det tilsvarende homogene system gælder:

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og $u(t)$ er en tidsafhængig søjlevektor.

- Systemet (1) siges at være asymptotisk stabilt,hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder

$$x_1(t) - x_2(t) \longrightarrow 0 \text{ for } t \longrightarrow \infty$$

- Da forskellen mellem to løsninger til det inhomogene system løser det tilsvarende homogene system gælder:
- Systemet (1) er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer I

- Vi betragter nu systemer af formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og $u(t)$ er en tidsafhængig søjlevektor.

- Systemet (1) siges at være asymptotisk stabilt,hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder

$$x_1(t) - x_2(t) \to 0 \text{ for } t \to \infty$$

- Da forskellen mellem to løsninger til det inhomogene system løser det tilsvarende homogene system gælder:
- Systemet (1) er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt.
- Systemet (1) kaldes BIBO-stabilt, hvis enhver løsning $x(t), t \in [t_0, \infty[$ hørende til et begrænset $u(t), t \in [t_0, \infty[$ er begrænset .

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer II

- Systemet (1) er BIBO-stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt. Langt bevis følger.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer II

- Systemet (1) er BIBO-stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt. Langt bevis følger.
- Hvis $\Phi(t)$ er en fundamentalmatrix, så er løsningerne til (1) givet ved

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer II

- Systemet (1) er BIBO-stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt. Langt bevis følger.
- Hvis $\Phi(t)$ er en fundamentalmatrix, så er løsningerne til (1) givet ved

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

- Lad $\Psi(t) = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$. Så er $\Psi(t)$ også en fundamentalmatrix, men opfylder desuden, at $\Psi(0) = I$.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer II

- Systemet (1) er BIBO-stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt. Langt bevis følger.
- Hvis $\Phi(t)$ er en fundamentalmatrix, så er løsningerne til (1) givet ved

$$x(t) = \Phi(t)\, c + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

- Lad $\Psi(t) = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$. Så er $\Psi(t)$ også en fundamentalmatrix, men opfylder desuden, at $\Psi(0) = I$.
- Da $x(t) = \Psi(t+s)\, c$ og $x(t) = \Psi(t)\,\Psi(s)\, c$ begge tilfredsstiller differentialligningen $\dot{x} = Ax$, og begge opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \Phi(s)\, c$, er de ens, dvs.

$$\Psi(t+s) = \Psi(t)\,\Psi(s)$$

for alle $s, t \in R$. Her af følger, at $\Psi(t)^{-1} = \Psi(-t)$.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer II

- Systemet (1) er BIBO-stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt. Langt bevis følger.
- Hvis $\Phi(t)$ er en fundamentalmatrix, så er løsningerne til (1) givet ved

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

- Lad $\Psi(t) = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$. Så er $\Psi(t)$ også en fundamentalmatrix, men opfylder desuden, at $\Psi(0) = I$.
- Da $x(t) = \Psi(t+s)\,c$ og $x(t) = \Psi(t)\,\Psi(s)\,c$ begge tilfredsstiller differentialligningen $\dot{x} = Ax$, og begge opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \Phi(s)\,c$, er de ens, dvs.

$$\Psi(t+s) = \Psi(t)\,\Psi(s)$$

for alle $s, t \in R$. Her af følger, at $\Psi(t)^{-1} = \Psi(-t)$.
- Så løsningerne til (1) er givet ved

$$x(t) = \Psi(t)\,c + \int_0^t \Psi(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer III

- Løsningerne givet ved

$$x(t) = \Psi(t)\, c + \int_0^t \Psi(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer III

- Løsningerne givet ved

$$x(t) = \Psi(t)\, c + \int_0^t \Psi(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

- Hvis alle egenværdierne opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \mu < 0$, så gælder for $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq \|\Psi(t)\, c\| + \int_0^t \|\Psi(t-\tau)\, u(\tau)\|\, d\tau$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer III

- Løsningerne givet ved

$$x(t) = \Psi(t)\, c + \int_0^t \Psi(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

- Hvis alle egenværdierne opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \mu < 0$, så gælder for $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq \|\Psi(t)\, c\| + \int_0^t \|\Psi(t-\tau)\, u(\tau)\|\, d\tau$$

- Hvis $u(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, fås videre

$$\leq e^{\mu t} K_1 + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)} K_2\, d\tau$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer III

- Løsningerne givet ved

$$x(t) = \Psi(t)\, c + \int_0^t \Psi(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

- Hvis alle egenværdierne opfylder $\operatorname{Re}\lambda_i < \mu < 0$, så gælder for $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq \|\Psi(t)\, c\| + \int_0^t \|\Psi(t-\tau)\, u(\tau)\|\, d\tau$$

- Hvis $u(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, fås videre

$$\leq e^{\mu t} K_1 + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)} K_2 d\tau$$

- $$\leq e^{\mu t} K_1 + K_2 \frac{1}{|\mu|}\left(1 - e^{\mu t}\right)$$

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer III

- Løsningerne givet ved

$$x(t) = \Psi(t)\,c + \int_0^t \Psi(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

- Hvis alle egenværdierne opfylder $\operatorname{Re}\lambda_i < \mu < 0$, så gælder for $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq \|\Psi(t)\,c\| + \int_0^t \|\Psi(t-\tau)\,u(\tau)\|\,d\tau$$

- Hvis $u(t)$ er begrænset for $t \geq 0$, fås videre

$$\leq e^{\mu t}K_1 + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}K_2\,d\tau$$

-

$$\leq e^{\mu t}K_1 + K_2\frac{1}{|\mu|}\left(1 - e^{\mu t}\right)$$

- der jo forbliver begrænset for $t \geq 0$.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer IV

- At det omvendt følger, at BIBO-stabilitet medfører asymptotisk stabilitet for det homogene system indses således:

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer IV

- At det omvendt følger, at BIBO-stabilitet medfører asymptotisk stabilitet for det homogene system indses således:
- Med $u = 0$ fås, at egenværdierne for A nødvendigvis har realdel ≤ 0.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer IV

- At det omvendt følger, at BIBO-stabilitet medfører asymptotisk stabilitet for det homogene system indses således:
- Med $u = 0$ fås, at egenværdierne for A nødvendigvis har realdel ≤ 0.
- Antag, at A har en egenværdi λ_j med $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ og lad v_j være en tilhørende egenvektor.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer IV

- At det omvendt følger, at BIBO-stabilitet medfører asymptotisk stabilitet for det homogene system indses således:
- Med $u = 0$ fås, at egenværdierne for A nødvendigvis har realdel ≤ 0.
- Antag, at A har en egenværdi λ_j med $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ og lad v_j være en tilhørende egenvektor.
- Sæt $u(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, så er $u(t)$ begrænset.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer IV

- At det omvendt følger, at BIBO-stabilitet medfører asymptotisk stabilitet for det homogene system indses således:
- Med $u = 0$ fås, at egenværdierne for A nødvendigvis har realdel ≤ 0.
- Antag, at A har en egenværdi λ_j med $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ og lad v_j være en tilhørende egenvektor.
- Sæt $u(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, så er $u(t)$ begrænset.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ har som en af sine løsninger $x(t) = te^{\lambda_j t} v_j$, idet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\left(te^{\lambda_j t} v_j\right) = te^{\lambda_j t}\lambda_j v_j + e^{\lambda_j t} v_j \\ &= te^{\lambda_j t} A v_j + e^{\lambda_j t} v_j \\ &= Ax(t) + u(t) \end{aligned}$$

men $x(t) = te^{\lambda_j t} v_j$ er ikke begrænset for $t \geq 0$.

2.8 Stabilitet for inhomogene systemer IV

- At det omvendt følger, at BIBO-stabilitet medfører asymptotisk stabilitet for det homogene system indses således:
- Med $u = 0$ fås, at egenværdierne for A nødvendigvis har realdel ≤ 0.
- Antag, at A har en egenværdi λ_j med $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ og lad v_j være en tilhørende egenvektor.
- Sæt $u(t) = e^{\lambda_j t} v_j$, så er $u(t)$ begrænset.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ har som en af sine løsninger $x(t) = te^{\lambda_j t} v_j$, idet

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\left(te^{\lambda_j t} v_j\right) = te^{\lambda_j t}\lambda_j v_j + e^{\lambda_j t} v_j \\
&= te^{\lambda_j t} A v_j + e^{\lambda_j t} v_j \\
&= Ax(t) + u(t)
\end{aligned}$$

  men $x(t) = te^{\lambda_j t} v_j$ er ikke begrænset for $t \geq 0$.
- Konklusionen er, at alle egenværdier for A har negativ realdel. Maple Eksempel 2.46.

4.1 Taylors sætning I

- Det n'te Taylorpolynomium P_n for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned}$$

- Det n'te Taylorpolynomium P_n for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \end{aligned}$$

- Taylors sætning: Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i et interval I indeholdende tallet x_0. Så findes der til ethvert givet $x \in I$ et tal ξ mellem x og x_0, så

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

4.1 Taylors sætning II

- Sætning 4.2. Antag, at C er en majorant for $\left|f^{(n+1)}\right|$ på I, dvs. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{C}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

4.1 Taylors sætning II

- Sætning 4.2. Antag, at C er en majorant for $\left|f^{(n+1)}\right|$ på I, dvs. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

- Hvis konstanten C ovenfor kan vælges uafhængig af n (og f i øvrigt er vilkårligt ofte differentiabel), så gælder for ethvert $x \in I$, at

$$P_n(x) \to f(x) \text{ for } n \to \infty$$

4.1 Taylors sætning II

- Sætning 4.2. Antag, at C er en majorant for $\left|f^{(n+1)}\right|$ på I, dvs. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

- Hvis konstanten C ovenfor kan vælges uafhængig af n (og f i øvrigt er vilkårligt ofte differentiabel), så gælder for ethvert $x \in I$, at

$$P_n(x) \to f(x) \text{ for } n \to \infty$$

- For at vise dette skal man vise, at for ethvert $a > 0$ gælder

$$\frac{a^n}{n!} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

4.1 Taylors sætning II

- Sætning 4.2. Antag, at C er en majorant for $\left|f^{(n+1)}\right|$ på I, dvs. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

- Hvis konstanten C ovenfor kan vælges uafhængig af n (og f i øvrigt er vilkårligt ofte differentiabel), så gælder for ethvert $x \in I$, at

$$P_n(x) \to f(x) \text{ for } n \to \infty$$

- For at vise dette skal man vise, at for ethvert $a > 0$ gælder

$$\frac{a^n}{n!} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

- For et simpelt bevis se mine noter på DiploMats hjemmeside (ret 01037 til 01905).

4.1 Taylors sætning II

- Sætning 4.2. Antag, at C er en majorant for $\left|f^{(n+1)}\right|$ på I, dvs. $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

- Hvis konstanten C ovenfor kan vælges uafhængig af n (og f i øvrigt er vilkårligt ofte differentiabel), så gælder for ethvert $x \in I$, at

$$P_n(x) \to f(x) \text{ for } n \to \infty$$

- For at vise dette skal man vise, at for ethvert $a > 0$ gælder

$$\frac{a^n}{n!} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

- For et simpelt bevis se mine noter på DiploMats hjemmeside (ret 01037 til 01905).
- Maple Eksempel 4.3.

4.2 Uendelige rækker, Definition af konvergens

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

Den uendelige række (2) siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så

$$S_N \to S \text{ for } N \to \infty$$

4.2 Uendelige rækker, Definition af konvergens

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

  Den uendelige række (2) siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så

$$S_N \to S \text{ for } N \to \infty$$

- I bekræftende fald skriver vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

  og S kaldes rækkens sum.

4.2 Uendelige rækker, Definition af konvergens

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

  Den uendelige række (2) siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så

$$S_N \to S \text{ for } N \to \infty$$

- I bekræftende fald skriver vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

  og S kaldes rækkens sum.
- Hvis rækken (2) ikke er konvergent, kaldes den divergent.

4.2 Uendelige rækker, Eksempler I

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler I

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Men så har vi

$$\frac{1}{2} S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler I

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Men så har vi

$$\frac{1}{2} S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Altså fås

$$S_N - \frac{1}{2} S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler I

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Men så har vi

$$\frac{1}{2}S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\sum_{n=2}^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Altså fås

$$S_N-\frac{1}{2}S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=2}^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

- Så

$$S_N=2\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\to 1 \text{ for } N\to\infty$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler I

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Men så har vi

$$\frac{1}{2} S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Altså fås

$$S_N - \frac{1}{2} S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

- Så

$$S_N = 2\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N \to 1 \text{ for } N \to \infty$$

- Konklusion $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er konvergent og har sum 1.

4.2 Uendelige rækker, Eksempler II

- $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$

- $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$

- Men så har vi

$$qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} q^n$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler II

- $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$

- Men så har vi

$$qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} q^n$$

- Altså fås

$$S_N - qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=1}^{N+1} q^n = 1 - q^{N+1}$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler II

- $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$

- Men så har vi

$$qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} q^n$$

- Altså fås

$$S_N - qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=1}^{N+1} q^n = 1 - q^{N+1}$$

- Så

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler II

- $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Vi betragter det N'te afsnit:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$

- Men så har vi

$$qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} q^n$$

- Altså fås

$$S_N - qS_N = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=1}^{N+1} q^n = 1 - q^{N+1}$$

- Så

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

- Konklusion $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ er konvergent og har sum $\frac{1}{1-q}$, når blot $|q| < 1$. Rækken er divergent ellers.

- Vi betragter rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler III

- Vi betragter rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$$

- Vi bemærker, at

$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler III

- Vi betragter rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- Vi bemærker, at

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- Så rækkens N'te afsnit teleskoperer:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

4.2 Uendelige rækker, Eksempler III

- Vi betragter rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$$
- Vi bemærker, at
$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
- Så rækkens N'te afsnit teleskoperer:
$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$
- Vi ser, at $S_N \to 1$ for $N \to \infty$, altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent med sum 1.

4.2 Uendelige rækker, n'te-ledskriteriet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.

4.2 Uendelige rækker, n'te-ledskriteriet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis: Forskellen mellem afsnittene S_N og S_{N-1} er

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_N$$

4.2 Uendelige rækker, n'te-ledskriteriet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.
- Bevis: Forskellen mellem afsnittene S_N og S_{N-1} er

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_N$$

- Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent (lad os sige med sum S), har vi dermed, at $S_N \to S$ for $N \to \infty$

4.2 Uendelige rækker, n'te-ledskriteriet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis: Forskellen mellem afsnittene S_N og S_{N-1} er

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_N$$

- Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent (lad os sige med sum S), har vi dermed, at $S_N \longrightarrow S$ for $N \longrightarrow \infty$
- men dermed selvfølgelig også $S_{N-1} \longrightarrow S$ for $N \longrightarrow \infty$.

4.2 Uendelige rækker, n'te-ledskriteriet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis: Forskellen mellem afsnittene S_N og S_{N-1} er

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_N$$

- Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent (lad os sige med sum S), har vi dermed, at $S_N \longrightarrow S$ for $N \longrightarrow \infty$
- men dermed selvfølgelig også $S_{N-1} \longrightarrow S$ for $N \longrightarrow \infty$.
- Altså fås, at $a_N \longrightarrow S - S = 0$ for $N \longrightarrow \infty$.

4.2 Uendelige rækker, n'te-ledskriteriet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis: Forskellen mellem afsnittene S_N og S_{N-1} er

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_N$$

- Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent (lad os sige med sum S), har vi dermed, at $S_N \longrightarrow S$ for $N \longrightarrow \infty$
- men dermed selvfølgelig også $S_{N-1} \longrightarrow S$ for $N \longrightarrow \infty$.
- Altså fås, at $a_N \longrightarrow S - S = 0$ for $N \longrightarrow \infty$.
- Eksempler.

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Bevis: I beviset kan antages, at $n_0 = 1$. Lad

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Bevis: I beviset kan antages, at $n_0 = 1$. Lad

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

- Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent med sum T.

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Bevis: I beviset kan antages, at $n_0 = 1$. Lad

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

- Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent med sum T.
- Vi har $S_N \leq T_N \leq T$ for alle N. Desuden er følgen $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ voksende.

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Bevis: I beviset kan antages, at $n_0 = 1$. Lad

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

- Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent med sum T.
- Vi har $S_N \leq T_N \leq T$ for alle N. Desuden er følgen $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ voksende.
- En voksende og opadtil begrænset følge er imidlertid konvergent. Det er følgen $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ dermed.

4.2 Uendelige rækker, Sammenligningskriteriet

- Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$.
- Vi skal sammenligne rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Bevis: I beviset kan antages, at $n_0 = 1$. Lad

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ og } T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

- Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent med sum T.
- Vi har $S_N \leq T_N \leq T$ for alle N. Desuden er følgen $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ voksende.
- En voksende og opadtil begrænset følge er imidlertid konvergent. Det er følgen $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ dermed.
- Eksempler.

4.2 Uendelige rækker, Den harmoniske række

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$
er divergent.

4.2 Uendelige rækker, Den harmoniske række

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$
er divergent.
- Bevis:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= S_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = S_2 + \frac{1}{2} = 2 \\
S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq S_4 + \frac{4}{8} = S_4 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\
S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \\
&\geq S_{2^k} + \frac{2^k}{2^{k+1}} = S_{2^k} + \frac{1}{2} = \frac{k+3}{2}
\end{aligned}$$