Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

2. oktober 2006

4.2 Uendelige rækker, Ækvivalenskriteriet

- Lad rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ have positive led. Rækkerne kaldes da ækvivalente, hvis grænseværdien

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

  eksisterer og er et positivt tal.

4.2 Uendelige rækker, Ækvivalenskriteriet

- Lad rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ have positive led. Rækkerne kaldes da ækvivalente, hvis grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

eksisterer og er et positivt tal.

- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.

4.2 Uendelige rækker, Ækvivalenskriteriet

- Lad rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ have positive led. Rækkerne kaldes da ækvivalente, hvis grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

  eksisterer og er et positivt tal.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.
- Bevis. Lad $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, så er $C > 0$ pr. antagelse. Men så eksisterer der et n_0, så $\frac{1}{2}C \le \frac{a_n}{b_n} \le 2C$ for $n \ge n_0$.

4.2 Uendelige rækker, Ækvivalenskriteriet

- Lad rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ have positive led. Rækkerne kaldes da ækvivalente, hvis grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

  eksisterer og er et positivt tal.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.
- Bevis. Lad $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, så er $C > 0$ pr. antagelse. Men så eksisterer der et n_0, så $\frac{1}{2}C \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2C$ for $n \geq n_0$.
- hvoraf følger, at $\frac{1}{2}Cb_n \leq a_n \leq 2Cb_n$ for $n \geq n_0$. Sammenligningskriteriet giver nu resultatet.

4.2 Uendelige rækker, Ækvivalenskriteriet

- Lad rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ have positive led. Rækkerne kaldes da ækvivalente, hvis grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

  eksisterer og er et positivt tal.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.
- Bevis. Lad $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, så er $C > 0$ pr. antagelse. Men så eksisterer der et n_0, så $\frac{1}{2}C \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2C$ for $n \geq n_0$.
- hvoraf følger, at $\frac{1}{2}Cb_n \leq a_n \leq 2Cb_n$ for $n \geq n_0$. Sammenligningskriteriet giver nu resultatet.
- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er ækvivalente. Den sidste er konvergent iflg. resultat fra sidst. Den første er derfor også.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.
- Hvis derfor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ også.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.
- Hvis derfor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ også.
- Men hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergente, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ konvergent (og også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$).

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2\,|a_n|$.
- Hvis derfor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ også.
- Men hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergente, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ konvergent (og også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$).
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} ((|a_n| + a_n) - |a_n|)$ konvergent. Men det er jo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2\,|a_n|$.
- Hvis derfor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ også.
- Men hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergente, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ konvergent (og også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$).
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} ((|a_n| + a_n) - |a_n|)$ konvergent. Men det er jo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Hvis rækken har komplekse led og $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, a_n|$ konvergent (sammenligning).

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.
- Hvis derfor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ også.
- Men hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergente, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ konvergent (og også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$).
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} ((|a_n| + a_n) - |a_n|)$ konvergent. Men det er jo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Hvis rækken har komplekse led og $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, a_n|$ konvergent (sammenligning).
- Men så er $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, a_n$ konvergent.

4.2 Absolut konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Bevis. Antag først, at alle leddene er reelle. Vi har for alle $n \geq 1$, at $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2\,|a_n|$.
- Hvis derfor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ også.
- Men hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergente, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ konvergent (og også $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$).
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} ((|a_n| + a_n) - |a_n|)$ konvergent. Men det er jo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Hvis rækken har komplekse led og $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\, a_n|$ konvergent (sammenligning).
- Men så er $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, a_n$ konvergent.
- Analogt vises at $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, a_n$ er konvergent. Men så er $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n + i\,\mathrm{Im}\, a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.
- Da $\left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ er pr. sammenligning rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right|$ konvergent.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.
- Da $\left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ er pr. sammenligning rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right|$ konvergent.
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$ absolut konvergent.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.
- Da $\left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ er pr. sammenligning rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right|$ konvergent.
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$ absolut konvergent.
- For en række med positive led er der ingen forskel på absolut konvergens og konvergens.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.
- Da $\left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ er pr. sammenligning rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right|$ konvergent.
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$ absolut konvergent.
- For en række med positive led er der ingen forskel på absolut konvergens og konvergens.
- Hvis en række er konvergent, men ikke absolut konvergent, siges den at være betinget konvergent.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.
- Da $\left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ er pr. sammenligning rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right|$ konvergent.
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$ absolut konvergent.
- For en række med positive led er der ingen forskel på absolut konvergens og konvergens.
- Hvis en række er konvergent, men ikke absolut konvergent, siges den at være betinget konvergent.
- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Rækken er ikke absolut konvergent, da den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent.

4.2 Absolut og betinget konvergens I

- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$.
- Da $\left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ er pr. sammenligning rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(3n)}{n^2}\right|$ konvergent.
- Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)}{n^2}$ absolut konvergent.
- For en række med positive led er der ingen forskel på absolut konvergens og konvergens.
- Hvis en række er konvergent, men ikke absolut konvergent, siges den at være betinget konvergent.
- Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Rækken er ikke absolut konvergent, da den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent.
- Rækken er imidlertid konvergent. Et bevis findes på næste side, men resultatet følger også af Leibniz' kriterium (herom senere).

4.2 Absolut og betinget konvergens II

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ er konvergent. Bevis.

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ er konvergent. Bevis.
- Vi betragter først afsnit med et lige antal led:

$$\begin{aligned} S_{2N} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N}\right) \\ &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)\cdot 2N} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)\,2n} \end{aligned}$$

4.2 Absolut og betinget konvergens II

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ er konvergent. Bevis.
- Vi betragter først afsnit med et lige antal led:

$$
\begin{aligned}
S_{2N} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}\right) \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2N-1) \cdot 2N} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)\,2n}
\end{aligned}
$$

- Men rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$ er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, altså konvergent. Så følgen $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ har en grænseværdi S. Men så gælder også $S_{2N+1} = S_{2N} + \frac{1}{2N+1} \to S$ for $N \to \infty$.

4.2 Absolut og betinget konvergens II

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ er konvergent. Bevis.
- Vi betragter først afsnit med et lige antal led:

$$
\begin{aligned}
S_{2N} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N}\right) \\
&= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)\cdot 2N} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)\,2n}
\end{aligned}
$$

- Men rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$ er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, altså konvergent. Så følgen $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ har en grænseværdi S. Men så gælder også $S_{2N+1}=S_{2N}+\frac{1}{2N+1}\to S$ for $N\to\infty$.
- Altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergent, men altså betinget konvergent.

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

så gælder:

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:

- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:

- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

så gælder:

- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \text{ for } n \to \infty$$

så gælder:

- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:

- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:

- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Begge bevises ved sammenligning med en kvotientrække.

4.2 Kvotientkriteriet, Rodkriteriet

- Kvotientkriteriet. Hvis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \text{ for } n \to \infty$$

  så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Begge bevises ved sammenligning med en kvotientrække.
- Rodkriteriet er i princippet stærkest, men ikke nødvendigvis lettest at bruge.

4.2 Eksempel på brug af kvotientkriteriet

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \tag{1}$$

4.2 Eksempel på brug af kvotientkriteriet

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \tag{1}$$

- Vi får

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^n} &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ for } n \to \infty \end{aligned}$$

4.2 Eksempel på brug af kvotientkriteriet

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \tag{1}$$

- Vi får

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^n} &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ for } n \to \infty \end{aligned}$$

- Men $e > 1$, så rækken (1) er divergent.

4.2 Eksempel på brug af kvotientkriteriet

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \tag{1}$$

- Vi får

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^n} &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ for } n \to \infty \end{aligned}$$

- Men $e > 1$, så rækken (1) er divergent.
- Bevis for delresultat:

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

4.2 Eksempel på brug af kvotientkriteriet

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \tag{1}$$
- Vi får
$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^n} &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ for } n \to \infty \end{aligned}$$
- Men $e > 1$, så rækken (1) er divergent.
- Bevis for delresultat:
$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$
- Men $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x+O\left(x^2\right)}{x} \to 1$ for $x \to 0$. Altså $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \to 1$ for $n \to \infty$, så $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ for $n \to \infty$.

4.2 Eksempel på brug af rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \tag{2}$$

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \tag{2}$$

- Vi får

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} &= \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \text{ for } n \to \infty \end{aligned}$$

4.2 Eksempel på brug af rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \tag{2}$$

- Vi får

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} &= \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \to \frac{1}{e} \text{ for } n \to \infty\end{aligned}$$

- Men $\frac{1}{e} < 1$, så rækken (2) er konvergent.

4.2 Eksempel på brug af rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \tag{2}$$

- Vi får

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} &= \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \text{ for } n \to \infty\end{aligned}$$

- Men $\frac{1}{e} < 1$, så rækken (2) er konvergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ derimod falder på n'te-ledskriteriet: n'te led går ikke mod nul. Rækken er divergent.

4.2 Eksempel på brug af kvotient- og rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$$

4.2 Eksempel på brug af kvotient- og rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$$

- Vi får

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \to \frac{1}{2} \text{ for } n \to \infty$$

så rækken er konvergent ifølge rodkriteriet.

4.2 Eksempel på brug af kvotient- og rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$$

- Vi får

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ for } n \longrightarrow \infty$$

så rækken er konvergent ifølge rodkriteriet.

- Vi prøver kvotientkriteriet:

$$\frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}} = \frac{2^{(-1)^n}}{2^{1+(-1)^{n+1}}} = \begin{cases} 2 & \text{for} \quad n \text{ lige} \\ \frac{1}{8} & \text{for} \quad n \text{ ulige} \end{cases}$$

4.2 Eksempel på brug af kvotient- og rodkriteriet

- Vi bruger rodkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$$

- Vi får

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ for } n \longrightarrow \infty$$

  så rækken er konvergent ifølge rodkriteriet.
- Vi prøver kvotientkriteriet:

$$\frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}} = \frac{2^{(-1)^n}}{2^{1+(-1)^{n+1}}} = \begin{cases} 2 & \text{for} \quad n \text{ lige} \\ \frac{1}{8} & \text{for} \quad n \text{ ulige} \end{cases}$$

- Kvotientkriteriet kan altså ikke bruges.

4.3 Integralkriteriet

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$. Så gælder:

4.3 Integralkriteriet

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$. Så gælder:
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ er konvergent.

4.3 Integralkriteriet

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$. Så gælder:
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
- Bemærkning. Ettallet kan erstattes med et vilkårligt helt tal q alle 3 steder ovenfor.

4.3 Integralkriteriet

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$. Så gælder:
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
- Bemærkning. Ettallet kan erstattes med et vilkårligt helt tal q alle 3 steder ovenfor.
- Bevis på tavlen med kridt følgende

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

4.3 Integralkriteriet

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$. Så gælder:
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
- Bemærkning. Ettallet kan erstattes med et vilkårligt helt tal q alle 3 steder ovenfor.
- Bevis på tavlen med kridt følgende

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

- Eksempel. Den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent, da $\int_1^{R} \frac{1}{x} dx = \ln R \to \infty$ for $R \to \infty$, så $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ er divergent.

4.3 Integralkriteriet

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$. Så gælder:
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
- Bemærkning. Ettallet kan erstattes med et vilkårligt helt tal q alle 3 steder ovenfor.
- Bevis på tavlen med kridt følgende

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

- Eksempel. Den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent, da $\int_1^R \frac{1}{x} dx = \ln R \to \infty$ for $R \to \infty$, så $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ er divergent.
- Eksempel 4.20. Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ for $p < 1$ og $p > 1$.

4.3 Vurdering af sum

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$ med $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.

4.3 Vurdering af sum

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$ med $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.
- Så gælder Korollar 4.21:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \sum_{n=1}^{N+1} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

4.3 Vurdering af sum

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$ med $\int_1^\infty f(x)\, dx < \infty$.
- Så gælder Korollar 4.21:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \sum_{n=1}^{N+1} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx$$

- Bemærkning. Ettallet kan erstattes med et vilkårligt helt tal q alle steder ovenfor (dog ikke ettallet i $N+1$).

4.3 Vurdering af sum

- Lad f være en kontinuert, aftagende og positiv funktion defineret på $[1, \infty[$ med $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.
- Så gælder Korollar 4.21:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \sum_{n=1}^{N+1} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Bemærkning. Ettallet kan erstattes med et vilkårligt helt tal q alle steder ovenfor (dog ikke ettallet i $N+1$).
- Eksempel. Maple.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ alternerende.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ alternerende.
- Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ alternerende.
- Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ konvergent.
- Desuden gælder, at forskellen mellem summen S og rækkens N'te afsnit S_N opfylder
$$|S - S_N| \leq b_{N+1}$$

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ alternerende.
- Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.
- Desuden gælder, at forskellen mellem summen S og rækkens N'te afsnit S_N opfylder

$$|S - S_N| \leq b_{N+1}$$

- Bevis: Man viser først, at følgen af de lige afsnit S_{2N} er voksende, og at følgen af de ulige afsnit S_{2N+1} er aftagende og at desuden alle de lige afsnit ligger under alle de ulige.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ alternerende.
- Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.
- Desuden gælder, at forskellen mellem summen S og rækkens N'te afsnit S_N opfylder
$$|S - S_N| \leq b_{N+1}$$
- Bevis: Man viser først, at følgen af de lige afsnit S_{2N} er voksende, og at følgen af de ulige afsnit S_{2N+1} er aftagende og at desuden alle de lige afsnit ligger under alle de ulige.
- Men så er begge følger konvergente. Men da $S_{2N+1} = S_{2N} + b_{2N+1}$ og $b_{2N+1} \to 0$ for $N \to \infty$ følger, at de har samme grænseværdi, hvorfor rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ er konvergent.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ alternerende.
- Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ konvergent.
- Desuden gælder, at forskellen mellem summen S og rækkens N'te afsnit S_N opfylder
$$|S - S_N| \leq b_{N+1}$$
- Bevis: Man viser først, at følgen af de lige afsnit S_{2N} er voksende, og at følgen af de ulige afsnit S_{2N+1} er aftagende og at desuden alle de lige afsnit ligger under alle de ulige.
- Men så er begge følger konvergente. Men da $S_{2N+1} = S_{2N} + b_{2N+1}$ og $b_{2N+1} \to 0$ for $N \to \infty$ følger, at de har samme grænseværdi, hvorfor rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ er konvergent.
- Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

4.4 Alternerende rækker, Leibniz' kriterium

- Hvis en række har skiftevis positive og negative led, kaldes den alternerende.
- Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ alternerende.
- Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \to \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.
- Desuden gælder, at forskellen mellem summen S og rækkens N'te afsnit S_N opfylder

$$|S - S_N| \leq b_{N+1}$$

- Bevis: Man viser først, at følgen af de lige afsnit S_{2N} er voksende, og at følgen af de ulige afsnit S_{2N+1} er aftagende og at desuden alle de lige afsnit ligger under alle de ulige.
- Men så er begge følger konvergente. Men da $S_{2N+1} = S_{2N} + b_{2N+1}$ og $b_{2N+1} \to 0$ for $N \to \infty$ følger, at de har samme grænseværdi, hvorfor rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ er konvergent.
- Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.
- Grafisk Maple-illustration.