Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

9. oktober 2006

5.1 Kvotientrækker

- Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

kaldes en kvotientrække.

5.1 Kvotientrækker

- Rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$
kaldes en kvotientrække.
- Den blev i uge 4 vist at være konvergent for $|x| < 1$ og ellers divergent.

5.1 Kvotientrækker

- Rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$
kaldes en kvotientrække.
- Den blev i uge 4 vist at være konvergent for $|x| < 1$ og ellers divergent.
- Summen er for $|x| < 1$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

5.1 Kvotientrækker

- Rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$
kaldes en kvotientrække.
- Den blev i uge 4 vist at være konvergent for $|x| < 1$ og ellers divergent.
- Summen er for $|x| < 1$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
- Hvis nedre grænse ikke er nul, fås en anden sum:
$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = x^N \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}$$

5.2 Taylorrækker I

- Taylorpolynomiet P_N for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

5.2 Taylorrækker I

- Taylorpolynomiet P_N for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Taylors sætning: Antag, at f er $N+1$ gange differentiabel i et interval I indeholdende tallet x_0. Så findes der til ethvert givet $x \in I$ et tal $\xi = \xi(N, x)$ mellem x og x_0, så

$$f(x) = P_N(x) + \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}$$

5.2 Taylorrækker I

- Taylorpolynomiet P_N for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Taylors sætning: Antag, at f er $N+1$ gange differentiabel i et interval I indeholdende tallet x_0. Så findes der til ethvert givet $x \in I$ et tal $\xi = \xi(N, x)$ mellem x og x_0, så

$$f(x) = P_N(x) + \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}$$

- Den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

er konvergent med sum $f(x)$, hvis og kun hvis

$$\frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1} \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

5.2 Taylorrækker II

- Antag, at $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$ og $n \in N$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

5.2 Taylorrækker II

- Antag, at $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$ og $n \in N$. Så gælder for alle $x \in I$:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$
- Bemærk, at den udførlige version af udsagnet er: Rækken er absolut konvergent med sum $f(x)$.

- Antag, at $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$ og $n \in N$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Bemærk, at den udførlige version af udsagnet er: Rækken er absolut konvergent med sum $f(x)$.
- Eksempel 5.7.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

5.2 Taylorrækker II

- Antag, at $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$ og $n \in N$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Bemærk, at den udførlige version af udsagnet er: Rækken er absolut konvergent med sum $f(x)$.
- Eksempel 5.7.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

- Eksempel 5.8.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

kaldes en potensrække.

5.2 Potensrækker

- Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

  kaldes en potensrække.
- Hvis rækken (1) er konvergent for $x = x_1$, så er rækken absolut konvergent for $|x| < |x_1|$.

5.2 Potensrækker

- Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

kaldes en potensrække.

- Hvis rækken (1) er konvergent for $x = x_1$, så er rækken absolut konvergent for $|x| < |x_1|$.
- Bevis. Vi kan antage $x_1 \neq 0$, ellers er sætningens udsagn tomt (men sandt).

5.2 Potensrækker

- Rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$
kaldes en potensrække.
- Hvis rækken (1) er konvergent for $x = x_1$, så er rækken absolut konvergent for $|x| < |x_1|$.
- Bevis. Vi kan antage $x_1 \neq 0$, ellers er sætningens udsagn tomt (men sandt).
- Af n'te-ledskriteriet følger, at $c_n x_1^n \to 0$ for $n \to \infty$. Derfor gælder, at $|c_n x_1^n| \leq 1$ for alle $n \geq n_0$.

5.2 Potensrækker

- Rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$
kaldes en potensrække.
- Hvis rækken (1) er konvergent for $x = x_1$, så er rækken absolut konvergent for $|x| < |x_1|$.
- Bevis. Vi kan antage $x_1 \neq 0$, ellers er sætningens udsagn tomt (men sandt).
- Af n'te-ledskriteriet følger, at $c_n x_1^n \to 0$ for $n \to \infty$. Derfor gælder, at $|c_n x_1^n| \leq 1$ for alle $n \geq n_0$.
- For $|x| < |x_1|$ gælder
$$|c_n x^n| = \left| c_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n \right| = |c_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

- Rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$
kaldes en potensrække.
- Hvis rækken (1) er konvergent for $x = x_1$, så er rækken absolut konvergent for $|x| < |x_1|$.
- Bevis. Vi kan antage $x_1 \neq 0$, ellers er sætningens udsagn tomt (men sandt).
- Af n'te-ledskriteriet følger, at $c_n x_1^n \to 0$ for $n \to \infty$. Derfor gælder, at $|c_n x_1^n| \leq 1$ for alle $n \geq n_0$.
- For $|x| < |x_1|$ gælder
$$|c_n x^n| = \left| c_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1} \right)^n \right| = |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$
- Men rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ er konvergent (kvotientrække), så rækken $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ er også konvergent (sammenligningskriteriet).

5.2 Potensrækker, Konvergensradius

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:

5.2 Potensrækker, Konvergensradius

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Intet kan på forhånd kan siges om tilfældet $|x| = \rho$.

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Intet kan på forhånd kan siges om tilfældet $|x| = \rho$.
- Hvis $\rho = 0$, er rækken kun konvergent for $x = 0$.

5.2 Potensrækker, Konvergensradius

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Intet kan på forhånd kan siges om tilfældet $|x| = \rho$.
- Hvis $\rho = 0$, er rækken kun konvergent for $x = 0$.
- Hvis $\rho = \infty$, er rækken absolut konvergent for alle $x \in C$.

5.2 Potensrækker, Konvergensradius

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Intet kan på forhånd kan siges om tilfældet $|x| = \rho$.
- Hvis $\rho = 0$, er rækken kun konvergent for $x = 0$.
- Hvis $\rho = \infty$, er rækken absolut konvergent for alle $x \in C$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ har konvergensradius $\rho = \infty$.

5.2 Potensrækker, Konvergensradius

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Intet kan på forhånd kan siges om tilfældet $|x| = \rho$.
- Hvis $\rho = 0$, er rækken kun konvergent for $x = 0$.
- Hvis $\rho = \infty$, er rækken absolut konvergent for alle $x \in C$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ har konvergensradius $\rho = \infty$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ har konvergensradius $\rho = 0$.

5.2 Potensrækker, Konvergensradius

- Af ovenstående lemma følger eksistensen af en *konvergensradius* ρ for enhver potensrække:
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Intet kan på forhånd kan siges om tilfældet $|x| = \rho$.
- Hvis $\rho = 0$, er rækken kun konvergent for $x = 0$.
- Hvis $\rho = \infty$, er rækken absolut konvergent for alle $x \in C$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ har konvergensradius $\rho = \infty$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ har konvergensradius $\rho = 0$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (en kvotientrække) har konvergensradius $\rho = 1$.

5.2 Potensrækker, Abels sætning

- Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ. Det er tænkeligt, at rækken er konvergent også for $x = \rho$ og/eller for $x = -\rho$.

5.2 Potensrækker, Abels sætning

- Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ. Det er tænkeligt, at rækken er konvergent også for $x = \rho$ og/eller for $x = -\rho$.
- Ved rækkens konvergensinterval forstås her det åbne, halvåbne eller lukkede interval på hvilket rækken er konvergent.

5.2 Potensrækker, Abels sætning

- Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ. Det er tænkeligt, at rækken er konvergent også for $x = \rho$ og/eller for $x = -\rho$.
- Ved rækkens konvergensinterval forstås her det åbne, halvåbne eller lukkede interval på hvilket rækken er konvergent.
- Der er tale om enten $]-\rho, \rho[$, $]-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho[$ eller $[-\rho, \rho]$.

5.2 Potensrækker, Abels sætning

- Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ. Det er tænkeligt, at rækken er konvergent også for $x = \rho$ og/eller for $x = -\rho$.
- Ved rækkens konvergensinterval forstås her det åbne, halvåbne eller lukkede interval på hvilket rækken er konvergent.
- Der er tale om enten $]-\rho, \rho[$, $]-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho[$ eller $[-\rho, \rho]$.
- Abels sætning: Funktionen defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

for alle x i konvergensintervallet er kontinuert.

5.2 Potensrækker, Abels sætning

- Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ. Det er tænkeligt, at rækken er konvergent også for $x = \rho$ og/eller for $x = -\rho$.
- Ved rækkens konvergensinterval forstås her det åbne, halvåbne eller lukkede interval på hvilket rækken er konvergent.
- Der er tale om enten $]-\rho, \rho[$, $]-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho[$ eller $[-\rho, \rho]$.
- Abels sætning: Funktionen defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

for alle x i konvergensintervallet er kontinuert.

- Vi skal senere se, at f er differentiabel i $]-\rho, \rho[$.

5.2 Potensrækker, Abels sætning

- Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ. Det er tænkeligt, at rækken er konvergent også for $x = \rho$ og/eller for $x = -\rho$.
- Ved rækkens konvergensinterval forstås her det åbne, halvåbne eller lukkede interval på hvilket rækken er konvergent.
- Der er tale om enten $]-\rho, \rho[$, $]-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho[$ eller $[-\rho, \rho]$.
- Abels sætning: Funktionen defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

for alle x i konvergensintervallet er kontinuert.
- Vi skal senere se, at f er differentiabel i $]-\rho, \rho[$.
- Det egentlige indhold af Abels sætning er derfor kontinuiteten i endepunkterne (når de da er med i konvergensintervallet)!).

5.2 Potensrækker, Eksempel ln

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- Med $a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ fås

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} n}{(n+1) x^n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} |x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty$$

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- Med $a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ fås

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n}{(n+1)\, x^n}\right| = \frac{n}{n+1} |x| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} |x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty$$

- Ifølge kvotientkriteriet er rækken absolut konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$. Konvergensradius er derfor 1.

5.2 Potensrækker, Eksempel ln

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- Med $a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ fås

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n}{(n+1)\, x^n}\right| = \frac{n}{n+1}\,|x| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,|x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty$$

- Ifølge kvotientkriteriet er rækken absolut konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$. Konvergensradius er derfor 1.
- Rækken er Taylorrækken for $\ln(1+x)$. Dette betyder ikke nødvendigvis, at

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

for $|x| < 1$, men det *er* tilfældet her! Se mine Taylor-noter på 01905's hjemmeside (Eks. 17 og Bem. 18). Formlen gælder også for $x = 1$.

5.2 Potensrækker, Eksempel arctan

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
- Med $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ fås

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{2(n+1)+1}(2n+1)}{(2(n+1)+1)x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)x^{2n+1}}\right| \\ &= \frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}|x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty \end{aligned}$$

5.2 Potensrækker, Eksempel arctan

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Med $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ fås

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{2(n+1)+1}(2n+1)}{(2(n+1)+1)x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)x^{2n+1}}\right| \\ &= \frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}|x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty\end{aligned}$$

- Ifølge kvotientkriteriet er rækken absolut konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$. Konvergensradius er derfor 1.

- Vi bruger kvotientkriteriet på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Med $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ fås

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{2(n+1)+1}(2n+1)}{(2(n+1)+1)\,x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)\,x^{2n+1}}\right| \\ &= \frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}|x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty \end{aligned}$$

- Ifølge kvotientkriteriet er rækken absolut konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$. Konvergensradius er derfor 1.
- Rækken er Taylorrækken for $\arctan x$. Vi vil vise, at for $-1 < x \leq 1$:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Antag, at $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradius $\rho > 0$. Lad $f(x)$ betegne summen.

5.2 Potensrækker, Differentiation

- Antag, at $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradius $\rho > 0$. Lad $f(x)$ betegne summen.
- Altså for $|x| < \rho$ er f defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

5.2 Potensrækker, Differentiation

- Antag, at $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradius $\rho > 0$. Lad $f(x)$ betegne summen.
- Altså for $|x| < \rho$ er f defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

- Så er f differentiabel og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

5.2 Potensrækker, Differentiation

- Antag, at $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradius $\rho > 0$. Lad $f(x)$ betegne summen.
- Altså for $|x| < \rho$ er f defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

- Så er f differentiabel og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

- Konvergensradius for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ er også ρ.

5.2 Potensrækker, Differentiation

- Antag, at $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradius $\rho > 0$. Lad $f(x)$ betegne summen.
- Altså for $|x| < \rho$ er f defineret ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

- Så er f differentiabel og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

- Konvergensradius for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ er også ρ.
- Beviset er ikke helt simpelt og udelades.

5.2 Potensrækker Eksempel arctan igen

- Vi har set, at rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
er konvergent for $-1 < x \leq 1$.

- Vi har set, at rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
er konvergent for $-1 < x \leq 1$.
- Lad os kalde summen for $f(x)$. Så gælder, at f er differentiabel og for $-1 < x < 1$:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

- Vi har set, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

er konvergent for $-1 < x \leq 1$.

- Lad os kalde summen for $f(x)$. Så gælder, at f er differentiabel og for $-1 < x < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

- Men da $f(0) = 0$ følger (i hvert fald for $-1 < x < 1$), at

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan x$$

5.2 Potensrækker Eksempel arctan igen

- Vi har set, at rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
er konvergent for $-1 < x \leq 1$.
- Lad os kalde summen for $f(x)$. Så gælder, at f er differentiabel og for $-1 < x < 1$:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}$$
- Men da $f(0) = 0$ følger (i hvert fald for $-1 < x < 1$), at
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$$
- Men f er kontinuert i hele konvergensintervallet. Det samme er arctan. Så summen er $\arctan x$ i hele konvergensintervallet.

5.2 Potensrækker, Eksempel ln igen

- Vi har set, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

5.2 Potensrækker, Eksempel ln igen

- Vi har set, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- er konvergent for $-1 < x \leq 1$. Vi giver et bevis for, at summen er $\ln(1+x)$.

5.2 Potensrækker, Eksempel ln igen

- Vi har set, at rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$
- er konvergent for $-1 < x \leq 1$. Vi giver et bevis for, at summen er $\ln(1+x)$.
- Lad os kalde summen for $f(x)$. Så gælder, at f er differentiabel og for $-1 < x < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$$

5.2 Potensrækker, Eksempel ln igen

- Vi har set, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- er konvergent for $-1 < x \leq 1$. Vi giver et bevis for, at summen er $\ln(1+x)$.
- Lad os kalde summen for $f(x)$. Så gælder, at f er differentiabel og for $-1 < x < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$$

- Men da $f(0) = 0$ følger (i hvert fald for $-1 < x < 1$), at

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x)$$

5.2 Potensrækker, Eksempel ln igen

- Vi har set, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

- er konvergent for $-1 < x \leq 1$. Vi giver et bevis for, at summen er $\ln(1+x)$.
- Lad os kalde summen for $f(x)$. Så gælder, at f er differentiabel og for $-1 < x < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$$

- Men da $f(0) = 0$ følger (i hvert fald for $-1 < x < 1$), at

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x)$$

- Men f er kontinuert i hele konvergensintervallet. Det samme er $x \to \ln(1+x)$. Så summen er $\ln(1+x)$ i hele konvergensintervallet.

5.2 Potensrækker er Taylorrækker

- Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ og lad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

hvor $|x| < \rho$.

5.2 Potensrækker er Taylorrækker

- Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ og lad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

hvor $|x| < \rho$.

- Så er Taylorrækken for f identisk med potensrækken, altså

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

for alle $n \geq 0$.

- Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ og lad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

hvor $|x| < \rho$.

- Så er Taylorrækken for f identisk med potensrækken, altså

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

for alle $n \geq 0$.

- Beviset er simpelt:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$

5.2 Potensrækker er Taylorrækker

- Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ og lad
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
hvor $|x| < \rho$.
- Så er Taylorrækken for f identisk med potensrækken, altså
$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$
for alle $n \geq 0$.
- Beviset er simpelt:
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$
- Så
$$f^{(k)}(0) = c_k k(k-1)(k-2)\dots 1 = c_k k!$$

5.2 Potensrækker er Taylorrækker

- Lad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ have konvergensradius ρ og lad
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
hvor $|x| < \rho$.
- Så er Taylorrækken for f identisk med potensrækken, altså
$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$
for alle $n \geq 0$.
- Beviset er simpelt:
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$$
- Så
$$f^{(k)}(0) = c_k k(k-1)(k-2)\ldots 1 = c_k k!$$
- Funktioner givet ved potensrækker er vilkårligt ofte differentiable. Er det omvendte tilfældet?

5.2 Taylorrække nul, men funktion ikke nul

- Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

5.2 Taylorrække nul, men funktion ikke nul

- Lad funktionen f være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$
- Så kan det vises, at f er vilkårligt ofte differentiabel, og at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 0$.

5.2 Taylorrække nul, men funktion ikke nul

- Lad funktionen f være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$
- Så kan det vises, at f er vilkårligt ofte differentiabel, og at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 0$.
- Men så er dens Taylorrække nulrækken, der jo har konvergensradius ∞.

5.2 Taylorrække nul, men funktion ikke nul

- Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

- Så kan det vises, at f er vilkårligt ofte differentiabel, og at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 0$.
- Men så er dens Taylorrække nulrækken, der jo har konvergensradius ∞.
- Det er altså ikke enhver vilkårligt ofte differentiabel funktion, der har en potensrækkeudvikling.

5.2 Taylorrække nul, men funktion ikke nul

- Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

- Så kan det vises, at f er vilkårligt ofte differentiabel, og at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \geq 0$.
- Men så er dens Taylorrække nulrækken, der jo har konvergensradius ∞.
- Det er altså ikke enhver vilkårligt ofte differentiabel funktion, der har en potensrækkeudvikling.
- Bevis for, at $f'(0) = 0$. Med $t = \frac{1}{x^2}$ har vi

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t} \to 0 \text{ for } t \to \infty$$