# Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

23. oktober 2006

# 5.3 Generelle uendelige funktionsrækker

- Eksempel 5.21. Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(1-x^2\right)^n$$

kan betragtes som en kvotientrække med kvotient $1-x^2$. Sum $x \cdot \frac{1}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x}$ gældende for $\left|1-x^2\right| < 1$, dvs. for $0 < |x| < \sqrt{2}$.

- Eksempel 5.21. Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(1-x^2\right)^n$$

kan betragtes som en kvotientrække med kvotient $1-x^2$. Sum $x \cdot \frac{1}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x}$ gældende for $\left|1-x^2\right| < 1$, dvs. for $0 < |x| < \sqrt{2}$.

- Eksempel 5.24. Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} B^n \cos\left(A^n x\right)$$

er absolut konvergent, når blot $|B| < 1$. Desuden er sumfunktionen kontinuert.

- Eksempel 5.21. Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(1-x^2\right)^n$$

kan betragtes som en kvotientrække med kvotient $1-x^2$. Sum $x \cdot \frac{1}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x}$ gældende for $\left|1-x^2\right| < 1$, dvs. for $0 < |x| < \sqrt{2}$.

- Eksempel 5.24. Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} B^n \cos\left(A^n x\right)$$

er absolut konvergent, når blot $|B| < 1$. Desuden er sumfunktionen kontinuert.

- Når $AB \geq 1$ er sumfunktionen ikke differentiabel i noget punkt!

# 5.3 Generelle uendelige funktionsrækker

- Eksempel 5.21. Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(1-x^2\right)^n$$

kan betragtes som en kvotientrække med kvotient $1-x^2$. Sum $x \cdot \frac{1}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x}$ gældende for $\left|1-x^2\right| < 1$, dvs. for $0 < |x| < \sqrt{2}$.

- Eksempel 5.24. Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} B^n \cos\left(A^n x\right)$$

er absolut konvergent, når blot $|B| < 1$. Desuden er sumfunktionen kontinuert.

- Når $AB \geq 1$ er sumfunktionen ikke differentiabel i noget punkt!
- Begge eksempler i Maple.

# 5.4 Uniform konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ siges at være uniformt konvergent på intervallet $I$, hvis der findes en funktion $f$ defineret på $I$, så afsnitsfølgen $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ for $x \in I$, dvs. at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_0$, så

$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$$

for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.

# 5.4 Uniform konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ siges at være uniformt konvergent på intervallet $I$, hvis der findes en funktion $f$ defineret på $I$, så afsnitsfølgen $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ for $x \in I$, dvs. at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_0$, så

$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$$

  for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- Det bemærkelsesværdige her er, at $N_0$ forlanges at kunne bestemmes, så det er fælles for *alle* $x \in I$.

# 5.4 Uniform konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ siges at være uniformt konvergent på intervallet $I$, hvis der findes en funktion $f$ defineret på $I$, så afsnitsfølgen $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ for $x \in I$, dvs. at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_0$, så

$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$$

  for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- Det bemærkelsesværdige her er, at $N_0$ forlanges at kunne bestemmes, så det er fælles for *alle* $x \in I$.
- Sætning (Næsten 5.29). En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.

# 5.4 Uniform konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ siges at være uniformt konvergent på intervallet $I$, hvis der findes en funktion $f$ defineret på $I$, så afsnitsfølgen $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ for $x \in I$, dvs. at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_0$, så

$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$$

  for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- Det bemærkelsesværdige her er, at $N_0$ forlanges at kunne bestemmes, så det er fælles for *alle* $x \in I$.
- Sætning (Næsten 5.29). En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.
- Mere generel sætning. En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af konvergensintervallet, som jo kan være $]-\rho, \rho[$ , $]-\rho, \rho]$ , $[-\rho, \rho[$ eller $[-\rho, \rho]$.

# 5.4 Uniform konvergens

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ siges at være uniformt konvergent på intervallet $I$, hvis der findes en funktion $f$ defineret på $I$, så afsnitsfølgen $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ for $x \in I$, dvs. at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $N_0$, så
$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$$
for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- Det bemærkelsesværdige her er, at $N_0$ forlanges at kunne bestemmes, så det er fælles for *alle* $x \in I$.
- Sætning (Næsten 5.29). En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.
- Mere generel sætning. En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af konvergensintervallet, som jo kan være $]-\rho, \rho[\,, ]-\rho, \rho]\,, [-\rho, \rho[$ eller $[-\rho, \rho]$.
- Eksempel 5.26 og 01-02 i Maple.

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis

$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis
$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$
- Sætning (5.32 I). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet $I$, så er den uniformt konvergent på $I$.

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis

$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$

- Sætning (5.32 I). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet $I$, så er den uniformt konvergent på $I$.
- Sætning (5.32 II). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet $I$, så er sumfunktionen kontinuert på $I$.

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis
$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$
- Sætning (5.32 I). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet $I$, så er den uniformt konvergent på $I$.
- Sætning (5.32 II). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet $I$, så er sumfunktionen kontinuert på $I$.
- Eksempel. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$ er uniformt konvergent på $R$,

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis

$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$

- Sætning (5.32 I). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet $I$, så er den uniformt konvergent på $I$.
- Sætning (5.32 II). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet $I$, så er sumfunktionen kontinuert på $I$.
- Eksempel. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$ er uniformt konvergent på $R$,
- da den har $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ som majorantrække:

$$\left|2^{-n} \cos(nx)\right| \leq 2^{-n} \text{ for alle } x \in R \text{ og } n \geq 0$$

og da majorantrækken er konvergent.

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis

$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$

- Sætning (5.32 I). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet $I$, så er den uniformt konvergent på $I$.
- Sætning (5.32 II). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet $I$, så er sumfunktionen kontinuert på $I$.
- Eksempel. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$ er uniformt konvergent på $R$,
- da den har $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ som majorantrække:

$$\left|2^{-n} \cos(nx)\right| \leq 2^{-n} \text{ for alle } x \in R \text{ og } n \geq 0$$

  og da majorantrækken er konvergent.
- Som summen af en uniform konvergent række er $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$ dermed kontinuert.

# 5.4 Majorantrække

- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet $I$, hvis

$$|f_n(x)| \leq k_n \text{ for alle } x \in I \text{ og alle } n \geq 1$$

- Sætning (5.32 I). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet $I$, så er den uniformt konvergent på $I$.
- Sætning (5.32 II). Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet $I$, så er sumfunktionen kontinuert på $I$.
- Eksempel. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$ er uniformt konvergent på $R$,
- da den har $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ som majorantrække:

$$\left|2^{-n} \cos(nx)\right| \leq 2^{-n} \text{ for alle } x \in R \text{ og } n \geq 0$$

  og da majorantrækken er konvergent.
- Som summen af en uniform konvergent række er $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(nx)$ dermed kontinuert.
- Summen $f(x)$ er i øvrigt $\frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$. Maple Eksempel 03 og 5.31.

# 5.4 Uniform konvergens uden majorantrække

- Eksempel. Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvor $f(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og hvor

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln x}$$

# 5.4 Uniform konvergens uden majorantrække

- Eksempel. Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvor $f(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

  og hvor

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln x}$$

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent på intervallet $[0, 1]$ med sum $f(x)$. Rækken består for ethvert $x$ højst af ét led forskellig fra nul.

# 5.4 Uniform konvergens uden majorantrække

- Eksempel. Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvor $f(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

  og hvor

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln x}$$

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent på intervallet $[0, 1]$ med sum $f(x)$. Rækken består for ethvert $x$ højst af ét led forskellig fra nul.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har ikke nogen konvergent majorantrække på $[0, 1]$. Den bedste majorantrække er den harmoniske.

# 5.4 Uniform konvergens uden majorantrække

- Eksempel. Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvor $f(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og hvor

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln x}$$

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent på intervallet $[0, 1]$ med sum $f(x)$. Rækken består for ethvert $x$ højst af ét led forskellig fra nul.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har ikke nogen konvergent majorantrække på $[0, 1]$. Den bedste majorantrække er den harmoniske.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er alligevel uniformt konvergent på $[0, 1]$.

# 5.4 Uniform konvergens uden majorantrække

- Eksempel. Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvor $f(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og hvor

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln x}$$

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent på intervallet $[0,1]$ med sum $f(x)$. Rækken består for ethvert $x$ højst af ét led forskellig fra nul.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har ikke nogen konvergent majorantrække på $[0,1]$. Den bedste majorantrække er den harmoniske.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er alligevel uniformt konvergent på $[0,1]$.
- Se illustration i Maple.

# 5.4 Integration og differentiation

- Sætning (Næsten 5.33). Lad $f_n$ være kontinuert på intervallet $I = [a, b]$ for alle $n$. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på $I$, så gælder, at

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

# 5.4 Integration og differentiation

- Sætning (Næsten 5.33). Lad $f_n$ være kontinuert på intervallet $I = [a, b]$ for alle $n$. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på $I$, så gælder, at

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

- Sætning (Næsten 5.34). Lad $f_n$ være differentiabel på intervallet $I = [a, b]$ for alle $n$. Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ er uniformt konvergent på $I$, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent for et eller andet $x \in I$. så gælder, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent og at summen er differentiabel med

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion I

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er konvergent for $x > 1$. Summen betegnes med $\zeta(x)$ og kaldes Riemanns zeta-funktion.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion I

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er konvergent for $x > 1$. Summen betegnes med $\zeta(x)$ og kaldes Riemanns zeta-funktion.
- Lad $\delta > 0$. For $x \geq 1 + \delta$ og $n \geq 1$ gælder
$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion I

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er konvergent for $x > 1$. Summen betegnes med $\zeta(x)$ og kaldes Riemanns zeta-funktion.
- Lad $\delta > 0$. For $x \geq 1 + \delta$ og $n \geq 1$ gælder
$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Rækken har dermed på intervallet $[1 + \delta, \infty[$ den konvergente majorantrække
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion I

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er konvergent for $x > 1$. Summen betegnes med $\zeta(x)$ og kaldes Riemanns zeta-funktion.
- Lad $\delta > 0$. For $x \geq 1 + \delta$ og $n \geq 1$ gælder
$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Rækken har dermed på intervallet $[1 + \delta, \infty[$ den konvergente majorantrække
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Rækken er altså uniformt konvergent på ethvert interval $[1 + \delta, \infty[$ med $\delta > 0$.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion I

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er konvergent for $x > 1$. Summen betegnes med $\zeta(x)$ og kaldes Riemanns zeta-funktion.
- Lad $\delta > 0$. For $x \geq 1 + \delta$ og $n \geq 1$ gælder
$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Rækken har dermed på intervallet $[1 + \delta, \infty[$ den konvergente majorantrække
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Rækken er altså uniformt konvergent på ethvert interval $[1 + \delta, \infty[$ med $\delta > 0$.
- Derfor er $\zeta$ kontinuert på intervallet $]1, \infty[$.

- Riemanns zetafunktion

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

er altså defineret og kontinuert for $x > 1$.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion II

- Riemanns zetafunktion

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

er altså defineret og kontinuert for $x > 1$.

- Den ledvist differentierede række

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

har også en konvergent majorantrække.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion II

- Riemanns zetafunktion
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er altså defineret og kontinuert for $x > 1$.
- Den ledvist differentierede række
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$
har også en konvergent majorantrække.
- Vi har nemlig med $\delta > 0$, $x \geq 1 + 2\delta$ og $n \geq 1$:
$$\frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^{1+2\delta}} = \frac{\ln n}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{\delta} \frac{\ln\left(n^\delta\right)}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\delta e} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion II

- Riemanns zetafunktion
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er altså defineret og kontinuert for $x > 1$.
- Den ledvist differentierede række
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$
har også en konvergent majorantrække.
- Vi har nemlig med $\delta > 0$, $x \geq 1 + 2\delta$ og $n \geq 1$:
$$\frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^{1+2\delta}} = \frac{\ln n}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{\delta} \frac{\ln\left(n^\delta\right)}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\delta e} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Altså er $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ uniformt konvergent på ethvert interval $[1 + 2\delta, \infty[$ med $\delta > 0$.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion II

- Riemanns zetafunktion
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
er altså defineret og kontinuert for $x > 1$.
- Den ledvist differentierede række
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$
har også en konvergent majorantrække.
- Vi har nemlig med $\delta > 0$, $x \geq 1 + 2\delta$ og $n \geq 1$:
$$\frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^{1+2\delta}} = \frac{\ln n}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{\delta} \frac{\ln\left(n^\delta\right)}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\delta e} \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}}$$
- Altså er $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ uniformt konvergent på ethvert interval $[1 + 2\delta, \infty[$ med $\delta > 0$.
- Derfor er $\zeta$ differentiabel på intervallet $]1, \infty[$ og $\zeta'(x)$ er givet ved ledvis differentiation.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion III

- Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$ er altså defineret og kontinuert for $z > 1$. Definitionen kan umiddelbart udvides til $\operatorname{Re} z > 1$.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion III

- Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$ er altså defineret og kontinuert for $z > 1$. Definitionen kan umiddelbart udvides til $\operatorname{Re} z > 1$.
- Ved analytisk fortsættelse kan $\zeta$ defineres i hele den komplekse plan bortset fra i 1. Herved bliver $-2, -4, -6, \ldots$ trivielt til nulpunkter for $\zeta$.

- Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$ er altså defineret og kontinuert for $z > 1$. Definitionen kan umiddelbart udvides til $\operatorname{Re} z > 1$.
- Ved analytisk fortsættelse kan $\zeta$ defineres i hele den komplekse plan bortset fra i 1. Herved bliver $-2, -4, -6, \ldots$ trivielt til nulpunkter for $\zeta$.
- Riemann-hypotesen (1859): De eneste ikke-trivielle nulpunkter for $\zeta$ ligger på den lodrette linie $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion III

- Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$ er altså defineret og kontinuert for $z > 1$. Definitionen kan umiddelbart udvides til $\mathrm{Re}\, z > 1$.
- Ved analytisk fortsættelse kan $\zeta$ defineres i hele den komplekse plan bortset fra i 1. Herved bliver $-2, -4, -6, \ldots$ trivielt til nulpunkter for $\zeta$.
- Riemann-hypotesen (1859): De eneste ikke-trivielle nulpunkter for $\zeta$ ligger på den lodrette linie $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.
- De første 29 nulpunkter med $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ er iflg. Maple
$0.5 + 14.1i, 0.5 + 21.0i, 0.5 + 25.0i, 0.5 + 30.4i, 0.5 + 32.9i,$
$0.5 + 37.6i, 0.5 + 40.9i, 0.5 + 43.3i, 0.5 + 48.0i, 0.5 + 49.8i,$
$0.5 + 53.0i, 0.5 + 56.4i, 0.5 + 59.3i, 0.5 + 60.8i, 0.5 + 65.1i,$
$0.5 + 67.1i, 0.5 + 69.5i, 0.5 + 72.1i, 0.5 + 75.7i, 0.5 + 77.1i,$
$0.5 + 79.3i, 0.5 + 82.9i, 0.5 + 84.7i, 0.5 + 87.4i, 0.5 + 88.8i,$
$0.5 + 92.5i, 0.5 + 94.7i, 0.5 + 95.9i, 0.5 + 98.8i$

# 5.4 Eksempel: Riemanns zeta-funktion III

- Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$ er altså defineret og kontinuert for $z > 1$. Definitionen kan umiddelbart udvides til $\mathrm{Re}\, z > 1$.
- Ved analytisk fortsættelse kan $\zeta$ defineres i hele den komplekse plan bortset fra i 1. Herved bliver $-2, -4, -6, \ldots$ trivielt til nulpunkter for $\zeta$.
- Riemann-hypotesen (1859): De eneste ikke-trivielle nulpunkter for $\zeta$ ligger på den lodrette linie $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.
- De første 29 nulpunkter med $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ er iflg. Maple $0.5 + 14.1i, 0.5 + 21.0i, 0.5 + 25.0i, 0.5 + 30.4i, 0.5 + 32.9i,$ $0.5 + 37.6i, 0.5 + 40.9i, 0.5 + 43.3i, 0.5 + 48.0i, 0.5 + 49.8i,$ $0.5 + 53.0i, 0.5 + 56.4i, 0.5 + 59.3i, 0.5 + 60.8i, 0.5 + 65.1i,$ $0.5 + 67.1i, 0.5 + 69.5i, 0.5 + 72.1i, 0.5 + 75.7i, 0.5 + 77.1i,$ $0.5 + 79.3i, 0.5 + 82.9i, 0.5 + 84.7i, 0.5 + 87.4i, 0.5 + 88.8i,$ $0.5 + 92.5i, 0.5 + 94.7i, 0.5 + 95.9i, 0.5 + 98.8i$
- Formodningen passer i hvertfald for de første $10^{13}$ nulpunkter (med imaginærdel $> 0$).

- Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

er uniformt konvergent på $R$, da den har $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergent majorantrække.

# 5.4 Eksempel: Fourierrække

- Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

  er uniformt konvergent på $R$, da den har $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergent majorantrække.
- Vi skal senere se, at summen er $\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ for $x \in [0, 2\pi]$.

# 5.4 Eksempel: Fourierrække

- Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

er uniformt konvergent på $R$, da den har $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergent majorantrække.

- Vi skal senere se, at summen er $\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ for $x \in [0, 2\pi]$.
- Den ledvist differentierede række

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

har ikke nogen konvergent majorantrække på noget interval.

# 5.4 Eksempel: Fourierrække

- Rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$
er uniformt konvergent på $R$, da den har $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergent majorantrække.
- Vi skal senere se, at summen er $\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ for $x \in [0, 2\pi]$.
- Den ledvist differentierede række
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$
har ikke nogen konvergent majorantrække på noget interval.
- Men det kan vises (ved Dirichlets kriterium), at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval af formen $[\delta, 2\pi - \delta]$, hvor $\delta > 0$.

- Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

er uniformt konvergent på $R$, da den har $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergent majorantrække.
- Vi skal senere se, at summen er $\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ for $x \in [0, 2\pi]$.
- Den ledvist differentierede række

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

har ikke nogen konvergent majorantrække på noget interval.
- Men det kan vises (ved Dirichlets kriterium), at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval af formen $[\delta, 2\pi - \delta]$, hvor $\delta > 0$.
- Derfor fås, at for $x \in \,]0, 2\pi[$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x$$

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in \,]0, \pi[$. Antag først, at $\cos nx \to 0$ for $n \to \infty$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ ($p \in Z$), og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ ($p \in Z$).
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in \,]0, \pi[$. Antag først, at $\cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Lad $\varepsilon > 0$. Så eksisterer et $n_1$ så $n \geq n_1$ medfører $|\cos nx| < \varepsilon$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in \,]0, \pi[$. Antag først, at $\cos nx \to 0$ for $n \to \infty$.
- Lad $\varepsilon > 0$. Så eksisterer et $n_1$ så $n \geq n_1$ medfører $|\cos nx| < \varepsilon$.
- Til $n_1$ svarer da et $p \in Z$ så $\left|n_1 x - \left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)\right| < 2\varepsilon$, når $\varepsilon$ er lille.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in ]0, \pi[$. Antag først, at $\cos nx \to 0$ for $n \to \infty$.
- Lad $\varepsilon > 0$. Så eksisterer et $n_1$ så $n \geq n_1$ medfører $|\cos nx| < \varepsilon$.
- Til $n_1$ svarer da et $p \in Z$ så $\left|n_1 x - \left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)\right| < 2\varepsilon$, når $\varepsilon$ er lille.
- Så fås $|2n_1 x - (2p+1)\,\pi| < 4\varepsilon$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in ]0, \pi[$. Antag først, at $\cos nx \to 0$ for $n \to \infty$.
- Lad $\varepsilon > 0$. Så eksisterer et $n_1$ så $n \geq n_1$ medfører $|\cos nx| < \varepsilon$.
- Til $n_1$ svarer da et $p \in Z$ så $\left| n_1 x - \left( \frac{\pi}{2} + p\pi \right) \right| < 2\varepsilon$, når $\varepsilon$ er lille.
- Så fås $|2n_1 x - (2p+1)\,\pi| < 4\varepsilon$.
- Men så $\cos(2n_1 x) \leq -1 + 4\varepsilon$ i modstrid med at $|\cos nx| < \varepsilon$ for alle $n \geq n_1$ (når $\varepsilon$ er lille).

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in \left]0, \pi\right[$. Antag først, at $\cos nx \to 0$ for $n \to \infty$.
- Lad $\varepsilon > 0$. Så eksisterer et $n_1$ så $n \geq n_1$ medfører $\left|\cos nx\right| < \varepsilon$.
- Til $n_1$ svarer da et $p \in Z$ så $\left|n_1 x - \left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)\right| < 2\varepsilon$, når $\varepsilon$ er lille.
- Så fås $\left|2n_1 x - (2p+1)\,\pi\right| < 4\varepsilon$.
- Men så $\cos(2n_1 x) \leq -1 + 4\varepsilon$ i modstrid med at $\left|\cos nx\right| < \varepsilon$ for alle $n \geq n_1$ (når $\varepsilon$ er lille).
- Vi konkluderer, at $\cos nx \to 0$ for $n \to \infty$ er umuligt.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Der gælder, at talfølgen $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$, og at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun er konvergent for $x = p\pi$ $(p \in Z)$.
- Bevis. Vi kan antage, at $x \in \left]0, \pi\right[$. Antag først, at $\cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Lad $\varepsilon > 0$. Så eksisterer et $n_1$ så $n \geq n_1$ medfører $\left|\cos nx\right| < \varepsilon$.
- Til $n_1$ svarer da et $p \in Z$ så $\left|n_1 x - \left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)\right| < 2\varepsilon$, når $\varepsilon$ er lille.
- Så fås $\left|2n_1 x - (2p+1)\,\pi\right| < 4\varepsilon$.
- Men så $\cos\left(2n_1 x\right) \leq -1 + 4\varepsilon$ i modstrid med at $\left|\cos nx\right| < \varepsilon$ for alle $n \geq n_1$ (når $\varepsilon$ er lille).
- Vi konkluderer, at $\cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$ er umuligt.
- En umiddelbar konsekvens er, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx$ er divergent for ethvert $x$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \to y$ for $n \to \infty$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right) = 2\sin x\cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right) = 2\sin x \cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right) = 2\sin x \cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.
- Vi konkluderer, at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 0).

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right) = 2\sin x \cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.
- Vi konkluderer, at $\left(\sin nx\right)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 0).
- En umiddelbar konsekvens er, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ kun er konvergent for $x = p\pi, p \in Z$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x) = 2\sin x \cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.
- Vi konkluderer, at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 0).
- En umiddelbar konsekvens er, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ kun er konvergent for $x = p\pi, p \in Z$.
- Antag nu, at $\cos nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right) = 2\sin x \cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.
- Vi konkluderer, at $\left(\sin nx\right)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 0).
- En umiddelbar konsekvens er, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ kun er konvergent for $x = p\pi, p \in Z$.
- Antag nu, at $\cos nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Så fås $\cos\left(\left(n-1\right)x\right) - \cos\left(\left(n+1\right)x\right) = 2\sin x \sin nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så fås $\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x) = 2\sin x \cos nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.
- Vi konkluderer, at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 0).
- En umiddelbar konsekvens er, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ kun er konvergent for $x = p\pi, p \in Z$.
- Antag nu, at $\cos nx \longrightarrow y$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Så fås $\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x) = 2\sin x \sin nx \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Men så følger først, at $x = p\pi$ $(p \in Z)$ og dernæst, at $p$ må være lige.

# Bemærkning om cos(nx) og sin(nx)

- Antag dernæst, at $\sin nx \to y$ for $n \to \infty$.
- Men så fås $\sin\left(\left(n+1\right)x\right) - \sin\left(\left(n-1\right)x\right) = 2\sin x \cos nx \to 0$ for $n \to \infty$.
- Heraf følger, at $\sin x = 0$.
- Vi konkluderer, at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 0).
- En umiddelbar konsekvens er, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ kun er konvergent for $x = p\pi, p \in Z$.
- Antag nu, at $\cos nx \to y$ for $n \to \infty$.
- Så fås $\cos\left(\left(n-1\right)x\right) - \cos\left(\left(n+1\right)x\right) = 2\sin x \sin nx \to 0$ for $n \to \infty$.
- Men så følger først, at $x = p\pi$ $(p \in Z)$ og dernæst, at $p$ må være lige.
- Vi konkluderer, at $(\cos nx)_{n=1}^{\infty}$ kun kan konvergere for $x = p2\pi$ $(p \in Z)$ (og så trivielt mod 1).