Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

30. oktober 2006

6.1 Fourierrækker I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π.

6.1 Fourierrækker I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π.
- *Antag*, at der for alle $x \in [-\pi, \pi]$, gælder, at $f(x)$ kan skrives som summen af følgende række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

6.1 Fourierrækker I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π.
- *Antag*, at der for alle $x \in [-\pi, \pi]$, gælder, at $f(x)$ kan skrives som summen af følgende række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- altså

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

og at antag, at rækken er uniformt konvergent på $[-\pi, \pi]$.

6.1 Fourierrækker I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π.
- *Antag*, at der for alle $x \in [-\pi, \pi]$, gælder, at $f(x)$ kan skrives som summen af følgende række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- altså

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

og at antag, at rækken er uniformt konvergent på $[-\pi, \pi]$.

- Så kan man vise (se Maple og næste levende billede), at

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \text{ for } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

6.1 Fourierrækker II

- Med $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ fås ved ledvis integration

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(px) \; dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \; dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(px) \; dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(px) \; dx
\end{aligned}$$

6.1 Fourierrækker II

- Med $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ fås ved ledvis integration

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)\;dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\;dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(px)\;dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(px)\;dx\end{aligned}$$

- Vi har

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(px)\;dx &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad n \neq p \\ \pi & \text{for} \quad n = p \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(px)\;dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\;dx &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad p > 0 \\ 2\pi & \text{for} \quad p = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

6.1 Fourierrækker III

- $p = 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0 \pi$ og $p > 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(px)\ dx = a_p \pi$.

6.1 Fourierrækker III

- $p = 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi$ og $p > 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)\ dx = a_p\pi$.
- Formlen for b_n findes på tilsvarende måde:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)\ dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\ dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(px)\ dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(px)\ dx\end{aligned}$$

6.1 Fourierrækker III

- $p = 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0\pi$ og $p > 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)\; dx = a_p\pi$.
- Formlen for b_n findes på tilsvarende måde:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)\; dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\; dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(px)\; dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(px)\; dx\end{aligned}$$

- Vi har for $p > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(px)\; dx &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad n \neq p \\ \pi & \text{for} \quad n = p \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(px)\; dx &= 0 \text{ og } \int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\; dx = 0\end{aligned}$$

- $p = 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi$ og $p > 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)\ dx = a_p\pi$.
- Formlen for b_n findes på tilsvarende måde:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)\ dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\ dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(px)\ dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(px)\ dx\end{aligned}$$

- Vi har for $p > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(px)\ dx &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad n \neq p \\ \pi & \text{for} \quad n = p\end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(px)\ dx &= 0 \text{ og } \int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\ dx = 0\end{aligned}$$

- For $p > 0$ fås dermed $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)\ dx = b_p\pi$.

6.1 Definition af Fourierrække

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Rækken

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

6.1 Definition af Fourierrække

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Rækken

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- hvor Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \text{ for } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

6.1 Definition af Fourierrække

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Rækken

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- hvor Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ for } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

- kaldes Fourierrækken for f. Man skriver

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

6.1 Definition af Fourierrække

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Rækken

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- hvor Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ for } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

- kaldes Fourierrækken for f. Man skriver

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- Herved undgår man at udtale sig om hvorvidt rækken er konvergent og om summen i bekræftende fald er $f(x)$.

6.1 Fourierrækker. Eksempel 6.2

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$.

6.1 Fourierrækker. Eksempel 6.2

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$.
- Da f er ulige, er også $f(x)\cos nx$ ulige, så

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = 0 \text{ for } n \geq 0$$

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$.
- Da f er ulige, er også $f(x)\cos nx$ ulige, så

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx = 0 \text{ for } n \geq 0$$

- og da $f(x)\sin nx$ er lige fås

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx \; dx = \frac{2}{\pi n}\left[-\cos nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

6.1 Fourierrækker. Eksempel 6.2

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$.
- Da f er ulige, er også $f(x)\cos nx$ ulige, så

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = 0 \text{ for } n \geq 0$$

- og da $f(x)\sin nx$ er lige fås

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi n}\left[-\cos nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) \end{aligned}$$

- Vi ser, at $b_{2k} = 0$ og $b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}$ med $k \geq 1$

6.1 Fourierrækker. Eksempel 6.2

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$.
- Da f er ulige, er også $f(x) \cos nx$ ulige, så

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \text{ for } n \geq 0$$

- og da $f(x) \sin nx$ er lige fås

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi n} [-\cos nx]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

- Vi ser, at $b_{2k} = 0$ og $b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}$ med $k \geq 1$
- Fourierrækken for f er

$$f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

6.1 Fourierrækker. Eksempel abs

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = |x|$.

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = |x|$.
- Da f er lige, er $f(x)\sin nx$ ulige, så

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = 0$$

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = |x|$.
- Da f er lige, er $f(x)\sin nx$ ulige, så

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \; dx = 0$$

- og da $f(x)\cos nx$ er lige fås for $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx \; dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos nx + nx\sin nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = |x|$.
- Da f er lige, er $f(x)\sin nx$ ulige, så

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0$$

- og da $f(x)\cos nx$ er lige fås for $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos nx + nx\sin nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

- For $n = 0$ fås $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \pi$.

6.1 Fourierrækker. Eksempel abs

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = |x|$.
- Da f er lige, er $f(x)\sin nx$ ulige, så

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx = 0$$

- og da $f(x)\cos nx$ er lige fås for $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\;dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos nx + nx\sin nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

- For $n = 0$ fås $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\;dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\;dx = \pi$.
- Fourierrækken for f er

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}$$

6.2 Stykkevist differentiabel funktion

- Lad f være periodisk med perioden 2π. Antag, at f på $]-\pi,\pi]$ er differentiabel med f' kontinuert pånær evt. i endeligt mange punkter.

6.2 Stykkevist differentiabel funktion

- Lad f være periodisk med perioden 2π. Antag, at f på $]-\pi, \pi]$ er differentiabel med f' kontinuert pånær evt. i endeligt mange punkter.
- Antag desuden, at i et sådan punkt a grænseværdierne

$$\lim_{x \downarrow a} f(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f(x), \quad \lim_{x \downarrow a} f'(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f'(x)$$

alle eksisterer.

6.2 Stykkevist differentiabel funktion

- Lad f være periodisk med perioden 2π. Antag, at f på $]-\pi,\pi]$ er differentiabel med f' kontinuert pånær evt. i endeligt mange punkter.
- Antag desuden, at i et sådan punkt a grænseværdierne

$$\lim_{x \downarrow a} f(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f(x), \quad \lim_{x \downarrow a} f'(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f'(x)$$

  alle eksisterer.
- Så kaldes f stykkevist differentiabel.

6.2 Stykkevist differentiabel funktion

- Lad f være periodisk med perioden 2π. Antag, at f på $]-\pi, \pi]$ er differentiabel med f' kontinuert pånær evt. i endeligt mange punkter.
- Antag desuden, at i et sådan punkt a grænseværdierne

$$\lim_{x \downarrow a} f(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f(x), \quad \lim_{x \downarrow a} f'(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f'(x)$$

  alle eksisterer.
- Så kaldes f stykkevist differentiabel.
- Eksempel. De periodiske udvidelser af funktionerne i Eksempel 6.2 og Eksempel abs er stykkevist differentiable.

6.2 Stykkevist differentiabel funktion

- Lad f være periodisk med perioden 2π. Antag, at f på $]-\pi,\pi]$ er differentiabel med f' kontinuert pånær evt. i endeligt mange punkter.
- Antag desuden, at i et sådan punkt a grænseværdierne

$$\lim_{x\downarrow a} f(x), \quad \lim_{x\uparrow a} f(x), \quad \lim_{x\downarrow a} f'(x), \quad \lim_{x\uparrow a} f'(x)$$

  alle eksisterer.
- Så kaldes f stykkevist differentiabel.
- Eksempel. De periodiske udvidelser af funktionerne i Eksempel 6.2 og Eksempel abs er stykkevist differentiable.
- Det kan gå rigtig galt: *Kolmogorov's sætning: Der eksisterer en integrabel funktion, hvis Fourierrække divergerer overalt.*

6.2 Fouriers sætning

- Lad f være periodisk med perioden 2π og antag f er stykkevist differentiabel.

6.2 Fouriers sætning

- Lad f være periodisk med perioden 2π og antag f er stykkevist differentiabel.
- Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.

6.2 Fouriers sætning

- Lad f være periodisk med perioden 2π og antag f er stykkevist differentiabel.
- Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$.

6.2 Fouriers sætning

- Lad f være periodisk med perioden 2π og antag f er stykkevist differentiabel.
- Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$.
- Ellers er Fourierrækkens sum givet ved gennemsnittet af grænseværdierne fra højre og venstre:

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \downarrow a} f(x) + \lim_{x \uparrow a} f(x)\right)$$

6.2 Fouriers sætning

- Lad f være periodisk med perioden 2π og antag f er stykkevist differentiabel.
- Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$.
- Ellers er Fourierrækkens sum givet ved gennemsnittet af grænseværdierne fra højre og venstre:
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\downarrow a} f(x) + \lim_{x\uparrow a} f(x)\right)$$
- Fourierrækken er uniformt konvergent på ethvert lukket kontinuitetsinterval (et lukket interval, der ikke indeholder diskontinuitetspunkter).

6.2 Fouriers sætning

- Lad f være periodisk med perioden 2π og antag f er stykkevist differentiabel.
- Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$.
- Ellers er Fourierrækkens sum givet ved gennemsnittet af grænseværdierne fra højre og venstre:
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\downarrow a} f(x) + \lim_{x\uparrow a} f(x)\right)$$
- Fourierrækken er uniformt konvergent på ethvert lukket kontinuitetsinterval (et lukket interval, der ikke indeholder diskontinuitetspunkter).
- Hvis f er kontinuert på R gælder om det N'te afsnit S_N i Fourierrækken:
$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\, dt}$$

- $S_N(x)$ kan skrives

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\,dt$$

- $S_N(x)$ kan skrives

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt$$

- Vi har (tag $f(x) = 1$ ovenfor):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt = 1 \text{ så } f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt$$

6.2 Skitse til bevis for Fouriers sætning

- $S_N(x)$ kan skrives

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt$$

- Vi har (tag $f(x) = 1$ ovenfor):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt = 1 \text{ så } f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt$$

- Vi skal altså vise, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right)\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

- $S_N(x)$ kan skrives

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt$$

- Vi har (tag $f(x) = 1$ ovenfor):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt = 1 \text{ så } f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt$$

- Vi skal altså vise, at

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}dt \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

- Riemann-Lebesgue's lemma:
  $\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)\cos(nt)\,dt \to 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)\sin(nt)\,dt \to 0$ for $n \to \infty$.

6.2 Sætning 6.12 (modificeret)

- Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ er konvergent.

6.2 Sætning 6.12 (modificeret)

- Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ er konvergent.
- Så er den trigonometriske række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

uniformt konvergent på R og den er Fourierrækken for sin sum $f(x)$. f er kontinuert.

- Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ er konvergent.
- Så er den trigonometriske række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

uniformt konvergent på R og den er Fourierrækken for sin sum $f(x)$. f er kontinuert.

- Der gælder, at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

6.2 Sætning 6.12 (modificeret)

- Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ er konvergent.
- Så er den trigonometriske række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

uniformt konvergent på R og den er Fourierrækken for sin sum $f(x)$. f er kontinuert.
- Der gælder, at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

- Bevis:

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, |\cos nx| + |b_n| \, |\sin nx| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + | \end{aligned}$$