Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

6. november 2006

6.3 Fourierrækker på kompleks form I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π og lad Fourierrækken for f være

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π og lad Fourierrækken for f være

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- Fourierkoefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \text{ for } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form I

- Lad f være defineret på R og være periodisk med perioden 2π og lad Fourierrækken for f være

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- Fourierkoefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ for } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

- Betragt Fourierrækkens N'te afsnit

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form II

- Eulers formler

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(e^{iu} + e^{-iu}\right) \text{ og } \sin u = \frac{1}{2i}\left(e^{iu} - e^{-iu}\right)$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form II

- Eulers formler

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(e^{iu} + e^{-iu}\right) \text{ og } \sin u = \frac{1}{2i}\left(e^{iu} - e^{-iu}\right)$$

- Herved fås (se Maple-worksheet til kapitel 6)

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) e^{inx}$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form II

- Eulers formler

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(e^{iu} + e^{-iu}\right) \text{ og } \sin u = \frac{1}{2i}\left(e^{iu} - e^{-iu}\right)$$

- Herved fås (se Maple-worksheet til kapitel 6)

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) e^{inx}$$

- Med

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{for} \quad n = 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) & \text{for} \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form II

- Eulers formler

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(e^{iu} + e^{-iu}\right) \text{ og } \sin u = \frac{1}{2i}\left(e^{iu} - e^{-iu}\right)$$

- Herved fås (se Maple-worksheet til kapitel 6)

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) e^{inx}$$

- Med

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{for} \quad n = 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) & \text{for} \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

- fås

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form III

- Fourierrækken på kompleks form får hermed udseendet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form III

- Fourierrækken på kompleks form får hermed udseendet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- En række af denne type kaldes konvergent, hvis

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

eksisterer.

6.3 Fourierrækker på kompleks form III

- Fourierrækken på kompleks form får hermed udseendet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- En række af denne type kaldes konvergent, hvis

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

eksisterer.

- Koefficienterne c_n kan for alle $n \in Z$ udtrykkes direkte ved f således

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

6.3 Fourierrækker på kompleks form III

- Fourierrækken på kompleks form får hermed udseendet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- En række af denne type kaldes konvergent, hvis

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

  eksisterer.

- Koefficienterne c_n kan for alle $n \in Z$ udtrykkes direkte ved f således

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

- Se Maple-worksheet til kapitel 6.

6.3 Eksempel 6.18 (I)

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$. (fra Eks. 6.2).

6.3 Eksempel 6.18 (I)

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$. (fra Eks. 6.2).
- Kompleks udregning giver

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx$$

6.3 Eksempel 6.18 (I)

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$. (fra Eks. 6.2).
- Kompleks udregning giver

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx$$

- For $n = 0$ fås åbenbart 0, så $c_0 = 0$. Første integral når $n \neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-in\pi}\right)$$

6.3 Eksempel 6.18 (I)

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$. (fra Eks. 6.2).
- Kompleks udregning giver

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-inx}\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\, dx$$

- For $n = 0$ fås åbenbart 0, så $c_0 = 0$. Første integral når $n \neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{in} e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-in\pi}\right)$$

- Udregnes andet integral fås eksakt samme resultat, så for $n \neq 0$ gælder

$$c_n = \frac{1}{\pi in}\left(1 - e^{-in\pi}\right) = \frac{1}{\pi in}\left(1 - (-1)^n\right)$$

6.3 Eksempel 6.18 (I)

- Lad f være givet på $[-\pi, \pi]$ ved $f(x) = signum(x)$. (fra Eks. 6.2).
- Kompleks udregning giver

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx$$

- For $n = 0$ fås åbenbart 0, så $c_0 = 0$. Første integral når $n \neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi in} \left(1 - e^{-in\pi}\right)$$

- Udregnes andet integral fås eksakt samme resultat, så for $n \neq 0$ gælder

$$c_n = \frac{1}{\pi in} \left(1 - e^{-in\pi}\right) = \frac{1}{\pi in} \left(1 - (-1)^n\right)$$

- Altså for alle $k \in Z$ gælder $c_{2k} = 0$ og

$$c_{2k-1} = \frac{2}{\pi i (2k-1)}$$

6.3 Eksempel 6.18 (II)

- Hermed er Fourierrækken på kompleks form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1} e^{i(2k-1)x} = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x}$$

6.3 Eksempel 6.18 (II)

- Hermed er Fourierrækken på kompleks form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1} e^{i(2k-1)x} = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x}$$

- Vi fandt tidligere Fourierrækken for f til

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)\,x\right)}{2k-1}$$

6.3 Eksempel 6.18 (II)

- Hermed er Fourierrækken på kompleks form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1} e^{i(2k-1)x} = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x}$$

- Vi fandt tidligere Fourierrækken for f til

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)\,x\right)}{2k-1}$$

- Ved brug af $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)$ for $n > 0$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right)$ for $n < 0$ fås

6.3 Eksempel 6.18 (II)

- Hermed er Fourierrækken på kompleks form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1} e^{i(2k-1)x} = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x}$$

- Vi fandt tidligere Fourierrækken for f til

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)\, x\right)}{2k-1}$$

- Ved brug af $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)$ for $n > 0$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right)$ for $n < 0$ fås
- $c_{2k} = 0$ for alle $k \in Z$ og for $k \geq 1$

$$c_{2k-1} = -\frac{1}{2} i b_{2k-1} = -\frac{1}{2} i \cdot \frac{4}{\pi\,(2k-1)} = \frac{2}{\pi i\,(2k-1)}$$

6.3 Eksempel 6.18 (II)

- Hermed er Fourierrækken på kompleks form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1} e^{i(2k-1)x} = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x}$$

- Vi fandt tidligere Fourierrækken for f til

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)\,x\right)}{2k-1}$$

- Ved brug af $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)$ for $n > 0$, $c_n = \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right)$ for $n < 0$ fås
- $c_{2k} = 0$ for alle $k \in Z$ og for $k \geq 1$

$$c_{2k-1} = -\frac{1}{2} i b_{2k-1} = -\frac{1}{2} i \cdot \frac{4}{\pi\left(2k-1\right)} = \frac{2}{\pi i\left(2k-1\right)}$$

- og for $k \leq -1$

$$c_{2k-1} = \frac{1}{2} i b_{-2k+1} = \frac{1}{2} i \cdot \frac{4}{\pi\left(-2k+1\right)} = \frac{2}{\pi i\left(2k-1\right)}$$

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$, altså $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$, altså $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.
- Dan gennemsnittene

$$
\begin{aligned}
t_1 &= s_1 \\
t_2 &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \\
t_3 &= \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) \\
&\vdots \\
t_N &= \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$, altså $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.
- Dan gennemsnittene

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \\ t_3 &= \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) \\ &\vdots \\ t_N &= \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Hvis talfølgen $(t_N)_{N=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdien t, altså hvis $\lim_{N\to\infty} t_N = t$, så siges rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at være Cesaro-summabel (C1) med sum t.

Cesaro-summabilitet. Eksempel 1

- Betragt den divergente række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

Cesaro-summabilitet. Eksempel 1

- Betragt den divergente række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

- Vi har $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$. Generelt $s_{2k} = 0$ og $s_{2k-1} = 1$ for alle $k \geq 1$

Cesaro-summabilitet. Eksempel 1

- Betragt den divergente række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

- Vi har $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$. Generelt $s_{2k} = 0$ og $s_{2k-1} = 1$ for alle $k \geq 1$
- Derfor fås $t_1 = s_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}$
  $t_3 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = \frac{1}{2}$

- Betragt den divergente række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

- Vi har $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$. Generelt $s_{2k} = 0$ og $s_{2k-1} = 1$ for alle $k \geq 1$
- Derfor fås $t_1 = s_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}$
  $t_3 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = \frac{1}{2}$
- $t_{2k} = \frac{1}{2k}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k}) = \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2}$

Cesaro-summabilitet. Eksempel 1

- Betragt den divergente række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

- Vi har $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$. Generelt $s_{2k} = 0$ og $s_{2k-1} = 1$ for alle $k \geq 1$
- Derfor fås $t_1 = s_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}$
  $t_3 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = \frac{1}{2}$
- $t_{2k} = \frac{1}{2k}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k}) = \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2}$
- $t_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k-1}) = \frac{1}{2k-1}k = \frac{k}{2k-1} \to \frac{1}{2}$ for $k \to \infty$.

Cesaro-summabilitet. Eksempel 1

- Betragt den divergente række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

- Vi har $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$. Generelt $s_{2k} = 0$ og $s_{2k-1} = 1$ for alle $k \geq 1$
- Derfor fås $t_1 = s_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}$
  $t_3 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = \frac{1}{2}$
- $t_{2k} = \frac{1}{2k}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k}) = \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2}$
- $t_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k-1}) = \frac{1}{2k-1}k = \frac{k}{2k-1} \to \frac{1}{2}$ for $k \to \infty$.
- Rækken er altså Cesaro-summabel med sum $\frac{1}{2}$.

Cesaro-summabilitet. Eksempel 2

- Vi vil undersøge summabiliteten af den divergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

Cesaro-summabilitet. Eksempel 2

- Vi vil undersøge summabiliteten af den divergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

- I Cesaro-noterne er vist, at for $x \neq p2\pi$ gælder

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Cesaro-summabilitet. Eksempel 2

- Vi vil undersøge summabiliteten af den divergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

- I Cesaro-noterne er vist, at for $x \neq p2\pi$ gælder

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

- Desuden er vist, at

$$t_N = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_N}{N+1} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)^2\right)$$

Cesaro-summabilitet. Eksempel 2

- Vi vil undersøge summabiliteten af den divergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

- I Cesaro-noterne er vist, at for $x \neq p2\pi$ gælder

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

- Desuden er vist, at

$$t_N = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_N}{N+1} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)^2\right)$$

- Heraf følger, at $t_N \to \frac{1}{2}$ for $N \to \infty$.

- Vi vil undersøge summabiliteten af den divergente række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

- I Cesaro-noterne er vist, at for $x \neq p2\pi$ gælder

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

- Desuden er vist, at

$$t_N = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_N}{N+1} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)^2\right)$$

- Heraf følger, at $t_N \to \frac{1}{2}$ for $N \to \infty$.
- På ganske lignende måde er det vist i Cesaro-noterne, at $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ er Cesaro-summabel for alle $x \in R$, og at summen for $x \neq p2\pi$ er $\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ for } n \longrightarrow \infty$$

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ for } n \longrightarrow \infty$$

- Bevis for sidste del: $s_n = nt_n - (n-1)\,t_{n-1}$ så $\frac{s_n}{n} = t_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) t_{n-1} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ for } n \longrightarrow \infty$$

- Bevis for sidste del: $s_n = nt_n - (n-1)\, t_{n-1}$ så $\frac{s_n}{n} = t_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) t_{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis for første del: $\frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{s_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{s_{n-1}}{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder
$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ for } n \longrightarrow \infty$$
- Bevis for sidste del: $s_n = nt_n - (n-1)\,t_{n-1}$ så $\frac{s_n}{n} = t_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) t_{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis for første del: $\frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{s_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{s_{n-1}}{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- En sætning af typen: Cesaro + ekstra $\Rightarrow$ Konvergens:

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder
$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ for } n \longrightarrow \infty$$
- Bevis for sidste del: $s_n = nt_n - (n-1)\,t_{n-1}$ så $\frac{s_n}{n} = t_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) t_{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis for første del: $\frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{s_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{s_{n-1}}{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- En sætning af typen: Cesaro + ekstra $\Rightarrow$ Konvergens:
- (*Littlewood's sætning*) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel og hvis talfølgen $(na_n)_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Sætninger om Cesaro-summabilitet

- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.
- Følgende resultat minder om n'te-ledskriteriet:
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ for } n \longrightarrow \infty$$

- Bevis for sidste del: $s_n = nt_n - (n-1)\, t_{n-1}$ så $\frac{s_n}{n} = t_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) t_{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- Bevis for første del: $\frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{s_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{s_{n-1}}{n-1} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.
- En sætning af typen: Cesaro + ekstra $\Rightarrow$ Konvergens:
- (*Littlewood's sætning*) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel og hvis talfølgen $(na_n)_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Beviser: Se noter om Cesaro-summabilitet på hjemmesiden.