Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

13. november 2006

Indre produkt i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum

$$
\begin{aligned}
\langle af, g \rangle &= a \langle f, g \rangle \\
\langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle \\
\overline{\langle f, g \rangle} &= \langle g, f \rangle
\end{aligned}
$$

Indre produkt i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum

$$\begin{aligned} \langle af, g \rangle &= a \langle f, g \rangle \\ \langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle \\ \overline{\langle f, g \rangle} &= \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

- Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Indre produkt i vektorrum

- Indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i et (komplekst) vektorrum

$$\begin{aligned} \langle af,g\rangle &= a\langle f,g\rangle \\ \langle f_1+f_2,g\rangle &= \langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle \\ \overline{\langle f,g\rangle} &= \langle g,f\rangle \end{aligned}$$

- Normen svarende til $\langle\cdot,\cdot\rangle$ er givet ved

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

- Ortonormalbasis i endelig-dimensionalt vektorrum V er en basis $(e_k)_{k=1}^n$ bestående af indbyrdes ortogonale vektorer af længde (norm) 1, dvs.

$$\langle e_i,e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i=j \\ 0 & \text{for} \quad i\neq j \end{cases}$$

Indre produkt i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum

$$\begin{aligned} \langle af, g\rangle &= a\langle f, g\rangle \\ \langle f_1 + f_2, g\rangle &= \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle \\ \overline{\langle f, g\rangle} &= \langle g, f\rangle \end{aligned}$$

- Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

- Ortonormalbasis i endelig-dimensionalt vektorrum V er en basis $(e_k)_{k=1}^n$ bestående af indbyrdes ortogonale vektorer af længde (norm) 1, dvs.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i = j \\ 0 & \text{for} \quad i \neq j \end{cases}$$

- Enhver vektor $f \in V$ kan skrives

$$f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$$

Hilbertrum

- Lad V være et vektorrum med norm $\|\cdot\|$. V er ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt.

Hilbertrum

- Lad V være et vektorrum med norm $\|\cdot\|$. V er ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt.
- Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af vektorer i V. Følgen kaldes en Cauchy-følge, hvis $\|x_n - x_m\| \to 0$ for $n, m \to \infty$.

Hilbertrum

- Lad V være et vektorrum med norm $\|\cdot\|$. V er ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt.
- Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af vektorer i V. Følgen kaldes en Cauchy-følge, hvis $\|x_n - x_m\| \to 0$ for $n, m \to \infty$.
- Lad nu H være et vektorrum med indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hvis enhver Cauchy-følge i H er konvergent, så kaldes H et Hilbertrum.

Hilbertrum

- Lad V være et vektorrum med norm $\|\cdot\|$. V er ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt.
- Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af vektorer i V. Følgen kaldes en Cauchy-følge, hvis $\|x_n - x_m\| \to 0$ for $n, m \to \infty$.
- Lad nu H være et vektorrum med indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hvis enhver Cauchy-følge i H er konvergent, så kaldes H et Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.

Hilbertrum

- Lad V være et vektorrum med norm $\|\cdot\|$. V er ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt.
- Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af vektorer i V. Følgen kaldes en Cauchy-følge, hvis $\|x_n - x_m\| \to 0$ for $n, m \to \infty$.
- Lad nu H være et vektorrum med indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hvis enhver Cauchy-følge i H er konvergent, så kaldes H et Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.
- Hvis H har en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, så kan enhver vektor $f \in H$ skrives

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \, e_k$$

Hilbertrum

- Lad V være et vektorrum med norm $\|\cdot\|$. V er ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt.
- Lad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af vektorer i V. Følgen kaldes en Cauchy-følge, hvis $\|x_n - x_m\| \to 0$ for $n, m \to \infty$.
- Lad nu H være et vektorrum med indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hvis enhver Cauchy-følge i H er konvergent, så kaldes H et Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.
- Hvis H har en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, så kan enhver vektor $f \in H$ skrives

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \, e_k$$

- Betydningen af ovenstående er:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle \, e_k \right\| \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

Det trigonometriske ortonormalsystem I

- Lad $H = L^2\left(-\pi,\pi\right)$ med indre produkt givet ved
$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

Det trigonometriske ortonormalsystem I

- Lad $H = L^2(-\pi, \pi)$ med indre produkt givet ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$
- Så kan det vises, at H er et Hilbertrum, forudsat at funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde identificeres.

Det trigonometriske ortonormalsystem I

- Lad $H = L^2(-\pi, \pi)$ med indre produkt givet ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)} dx$$
- Så kan det vises, at H er et Hilbertrum, forudsat at funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde identificeres.
- En ortonormalbasis er givet ved:

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2\cdot), \ldots$$

Det trigonometriske ortonormalsystem I

- Lad $H = L^2(-\pi, \pi)$ med indre produkt givet ved
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}dx$$
- Så kan det vises, at H er et Hilbertrum, forudsat at funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde identificeres.
- En ortonormalbasis er givet ved:

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2\cdot), \ldots$$

- Vi så nemlig tidligere (uge 8), at

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(px)\;dx &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad n \neq p \\ \pi & \text{for} \quad n = p \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(px)\;dx &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\;dx &= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad p > 0 \\ 2\pi & \text{for} \quad p = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Det trigonometriske ortonormalsystem II

- Opskrivningen $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ fører her til udsagnet om af Fourierrækken for f er konvergent med sum f:

$$
\begin{aligned}
f &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) \\
&\quad + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot) + b_n \sin(n\cdot)
\end{aligned}
$$

Det trigonometriske ortonormalsystem II

- Opskrivningen $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ fører her til udsagnet om af Fourierrækken for f er konvergent med sum f:

$$
\begin{aligned}
f &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) \\
&\quad + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot) + b_n \sin(n\cdot)
\end{aligned}
$$

- Med $s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ betyder dette, at

$$\|f - s_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 \, dx \to 0 \text{ for } N \to \infty$$

Parsevals sætning

- Antag, at H er et Hilbertrum med en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Så har vi altså $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$.

Parsevals sætning

- Antag, at H er et Hilbertrum med en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Så har vi altså $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Heraf følger Parsevals sætning:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

Parsevals sætning

- Antag, at H er et Hilbertrum med en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Så har vi altså $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Heraf følger Parsevals sætning:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

- For det trigonometriske ortonormalsystem lyder Parsevals sætning således

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |a_n|^2 + \pi |b_n|^2$$

Parsevals sætning

- Antag, at H er et Hilbertrum med en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Så har vi altså $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Heraf følger Parsevals sætning:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

- For det trigonometriske ortonormalsystem lyder Parsevals sætning således

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |a_n|^2 + \pi |b_n|^2$$

- Altså

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

Parsevals sætning

- Antag, at H er et Hilbertrum med en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Så har vi altså $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Heraf følger Parsevals sætning:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

- For det trigonometriske ortonormalsystem lyder Parsevals sætning således

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi |a_n|^2 + \pi |b_n|^2$$

- Altså

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

- Numerisktegnene er kun nødvendige, hvis funktionen f har komplekse værdier.

Parsevals sætning: Eksempler

- Eksempel 6.20. Funktionen $f(x) = signum(x)$ defineret på $[-\pi, \pi]$ har Fourierrækken

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

Parsevals sætning: Eksempler

- Eksempel 6.20. Funktionen $f(x) = signum(x)$ defineret på $[-\pi, \pi]$ har Fourierrækken
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$
- Vi har
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx = 1$$

Parsevals sætning: Eksempler

- Eksempel 6.20. Funktionen $f(x) = signum(x)$ defineret på $[-\pi, \pi]$ har Fourierrækken
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$
- Vi har
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx = 1$$
- Parseval giver derfor
$$1 = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

Parsevals sætning: Eksempler

- Eksempel 6.20. Funktionen $f(x) = signum(x)$ defineret på $[-\pi, \pi]$ har Fourierrækken
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$
- Vi har
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx = 1$$
- Parseval giver derfor
$$1 = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$
- Så vi har
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Chebyshev-polynomierne I

- Lad H være mængden af de funktioner, for hvilke

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty$$

Chebyshev-polynomierne I

- Lad H være mængden af de funktioner, for hvilke

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty$$

- med indre produkt givet ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Chebyshev-polynomierne I

- Lad H være mængden af de funktioner, for hvilke
$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty$$
- med indre produkt givet ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
- Så kan det vises, at H er et Hilbertrum, forudsat at funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde identificeres.

Chebyshev-polynomierne I

- Lad H være mængden af de funktioner, for hvilke
$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty$$
- med indre produkt givet ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
- Så kan det vises, at H er et Hilbertrum, forudsat at funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde identificeres.
- Chebyshev-polynomierne $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ defineres for alle $x \in [-1, 1]$ og $n \geq 0$ ved
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Chebyshev-polynomierne I

- Lad H være mængden af de funktioner, for hvilke
$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty$$
- med indre produkt givet ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
- Så kan det vises, at H er et Hilbertrum, forudsat at funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde identificeres.
- Chebyshev-polynomierne $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ defineres for alle $x \in [-1, 1]$ og $n \geq 0$ ved
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$
- De første 3 Chebyshevpolynomier er
$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0) = 1, \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x \\ T_2(x) &= \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

Chebyshev-polynomierne II

- Chebyshevpolynomierne er ortogonale:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$

Chebyshev-polynomierne II

- Chebyshevpolynomierne er ortogonale:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$

- Substituér $t = \arccos x$ altså $x = \cos t$, så fås

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= \int_{\pi}^{0} \cos nt \cos mt \frac{1}{\sin t} (-\sin t)\, dt \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos nt \cos mtdt\end{aligned}$$

Chebyshev-polynomierne II

- Chebyshevpolynomierne er ortogonale:

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

- Substituér $t = \arccos x$ altså $x = \cos t$, så fås

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_{\pi}^{0} \cos nt \cos mt \frac{1}{\sin t} (-\sin t)\, dt \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos nt \cos mt dt \end{aligned}$$

- Dette integral er nul, når $m \neq n$ og for $n = m > 0$ har det værdien $\frac{\pi}{2}$. For $m = n = 0$ har det værdien π.

Chebyshev-polynomierne II

- Chebyshevpolynomierne er ortogonale:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

- Substituér $t = \arccos x$ altså $x = \cos t$, så fås

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_{\pi}^{0} \cos nt \cos mt \frac{1}{\sin t}(-\sin t)\, dt \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos nt \cos mt dt\end{aligned}$$

- Dette integral er nul, når $m \neq n$ og for $n = m > 0$ har det værdien $\frac{\pi}{2}$. For $m = n = 0$ har det værdien π.
- Hermed er vist, at $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n\right)_{n=1}^{\infty}$ udgør et ortonormalsystem. Det er faktisk også en basis.