Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

20. november 2006

Definition

- Lad for ethvert $k = 0, 1, 2, \ldots$ A_k være en $n \times n$-matrix. Betragt den uendelige række

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

Definition

- Lad for ethvert $k = 0, 1, 2, \ldots$ A_k være en $n \times n$-matrix. Betragt den uendelige række

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

- Vi vil kalde rækken konvergent, hvis

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k)_{ij}$$

  er konvergent for etvert par (i, j) med $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Altså hvis rækken er elementvis konvergent.

Definition

- Lad for ethvert $k = 0, 1, 2, \ldots$ A_k være en $n \times n$-matrix. Betragt den uendelige række
$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$
- Vi vil kalde rækken konvergent, hvis
$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k)_{ij}$$
er konvergent for etvert par (i, j) med $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Altså hvis rækken er elementvis konvergent.
- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Definition

- Lad for ethvert $k = 0, 1, 2, \ldots$ A_k være en $n \times n$-matrix. Betragt den uendelige række

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

- Vi vil kalde rækken konvergent, hvis

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k)_{ij}$$

  er konvergent for etvert par (i, j) med $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Altså hvis rækken er elementvis konvergent.
- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

- Rækken er konvergent for enhver kvadratisk matrix A.

Definition

- Lad for ethvert $k = 0, 1, 2, \ldots$ A_k være en $n \times n$-matrix. Betragt den uendelige række
$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$
- Vi vil kalde rækken konvergent, hvis
$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k)_{ij}$$
er konvergent for etvert par (i, j) med $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Altså hvis rækken er elementvis konvergent.
- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$
- Rækken er konvergent for enhver kvadratisk matrix A.
- Bevis følger.

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.
- Antag, at $|a_{ij}| \leq M_a$ og $b_{ij} \leq M_b$ for alle i, j. Så fås for ethvert r og s

$$\left|(AB)_{rs}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ri}| \, |b_{is}| \leq n M_a M_b$$

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.
- Antag, at $|a_{ij}| \leq M_a$ og $b_{ij} \leq M_b$ for alle i, j. Så fås for ethvert r og s

$$\left|(AB)_{rs}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ri}| \, |b_{is}| \leq n M_a M_b$$

- Specielt gælder, når $B = A$, at $\left|\left(A^2\right)_{rs}\right| \leq n M_a^2$.

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.
- Antag, at $|a_{ij}| \leq M_a$ og $b_{ij} \leq M_b$ for alle i, j. Så fås for ethvert r og s

$$\left|(AB)_{rs}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ri}|\, |b_{is}| \leq n M_a M_b$$

- Specielt gælder, når $B = A$, at $\left|\left(A^2\right)_{rs}\right| \leq n M_a^2$.
- Med $B = A^2$ fås herefter $\left|\left(A^3\right)_{rs}\right| \leq n M_a n M_a^2 = n^2 M_a^3$.

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.
- Antag, at $|a_{ij}| \leq M_a$ og $b_{ij} \leq M_b$ for alle i, j. Så fås for ethvert r og s

$$\left|(AB)_{rs}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ri}| \, |b_{is}| \leq nM_a M_b$$

- Specielt gælder, når $B = A$, at $\left|\left(A^2\right)_{rs}\right| \leq nM_a^2$.
- Med $B = A^2$ fås herefter $\left|\left(A^3\right)_{rs}\right| \leq nM_a nM_a^2 = n^2 M_a^3$.
- Ved fortsættelse ses, at $\left|\left(A^k\right)_{rs}\right| \leq n^{k-1} M_a^k = \frac{1}{n}\left(nM_a\right)^k$.

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.
- Antag, at $|a_{ij}| \leq M_a$ og $b_{ij} \leq M_b$ for alle i, j. Så fås for ethvert r og s

$$\left|(AB)_{rs}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ri}| \, |b_{is}| \leq nM_a M_b$$

- Specielt gælder, når $B = A$, at $\left|\left(A^2\right)_{rs}\right| \leq nM_a^2$.
- Med $B = A^2$ fås herefter $\left|\left(A^3\right)_{rs}\right| \leq nM_a nM_a^2 = n^2 M_a^3$.
- Ved fortsættelse ses, at $\left|\left(A^k\right)_{rs}\right| \leq n^{k-1} M_a^k = \frac{1}{n} \left(nM_a\right)^k$.
- Følgende række er imidlertid konvergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(nM_a\right)^k$$

Bevis for konvergens

- Lad A og B være to $n \times n$-matricer. Så har vi $(AB)_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_{is}$.
- Antag, at $|a_{ij}| \leq M_a$ og $b_{ij} \leq M_b$ for alle i, j. Så fås for ethvert r og s

$$\left|(AB)_{rs}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ri}|\,|b_{is}| \leq nM_a M_b$$

- Specielt gælder, når $B = A$, at $\left|\left(A^2\right)_{rs}\right| \leq nM_a^2$.
- Med $B = A^2$ fås herefter $\left|\left(A^3\right)_{rs}\right| \leq nM_a nM_a^2 = n^2 M_a^3$.
- Ved fortsættelse ses, at $\left|\left(A^k\right)_{rs}\right| \leq n^{k-1} M_a^k = \frac{1}{n}\left(nM_a\right)^k$.
- Følgende række er imidlertid konvergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(nM_a\right)^k$$

- Sammenligningskriteriet giver den absolutte konvergens af

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(A^k\right)_{rs}$$

Diagonalmatricer

- Lad Λ være en diagonalmatrix:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ så } \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Diagonalmatricer

- Lad Λ være en diagonalmatrix:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ så } \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

- Dermed ser vi, at

$$e^\Lambda = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Diagonaliserbare matricer

- Lad A være en diagonaliserbar matrix. Så eksisterer der en invertibel matrix P og en diagonalmatrix Λ så

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

Diagonaliserbare matricer

- Lad A være en diagonaliserbar matrix. Så eksisterer der en invertibel matrix P og en diagonalmatrix Λ så
$$A = P\Lambda P^{-1}$$
- Heraf fås
$$\begin{aligned} A^k &= \left(P\Lambda P^{-1}\right)^k = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right) \\ &= P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$

Diagonaliserbare matricer

- Lad A være en diagonaliserbar matrix. Så eksisterer der en invertibel matrix P og en diagonalmatrix Λ så
$$A = P\Lambda P^{-1}$$
- Heraf fås
$$\begin{aligned} A^k &= \left(P\Lambda P^{-1}\right)^k = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right) \\ &= P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$
- Så vi finder
$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P\Lambda^k P^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Lambda^k\right)P^{-1} = Pe^{\Lambda}P^{-1} \end{aligned}$$

Diagonaliserbare matricer

- Lad A være en diagonaliserbar matrix. Så eksisterer der en invertibel matrix P og en diagonalmatrix Λ så
$$A = P\Lambda P^{-1}$$
- Heraf fås
$$\begin{aligned} A^k &= \left(P\Lambda P^{-1}\right)^k = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right) \\ &= P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$
- Så vi finder
$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P\Lambda^k P^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Lambda^k\right)P^{-1} = Pe^{\Lambda}P^{-1} \end{aligned}$$
- Altså $e^A = Pe^{\Lambda}P^{-1}$. Dette vigtige resultat ser ud til at mangle i bogen.

Eksempel 7.2

- Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel 7.2

- Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vi finder, at $A^2 = A$, hvoraf følger, at $A^k = A$ for alle $k \geq 1$.

Eksempel 7.2

- Lad A være matricen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Vi finder, at $A^2 = A$, hvoraf følger, at $A^k = A$ for alle $k \geq 1$.
- Altså får vi

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) A \\ &= I + (e-1) A = \begin{bmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eksempel 7.3

- Lad A være matricen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 7.3

- Lad A være matricen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
- Egenværdierne er i og $-i$ med tilhørende egenvektorer $[-i\ 1]^T$ og $[i\ 1]^T$.

Eksempel 7.3

- Lad A være matricen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
- Egenværdierne er i og $-i$ med tilhørende egenvektorer $[-i\ 1]^T$ og $[i\ 1]^T$.
- Altså får vi for $t \in R$
$$e^{At} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Eksempel 7.3

- Lad A være matricen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
- Egenværdierne er i og $-i$ med tilhørende egenvektorer $[-i\ 1]^T$ og $[i\ 1]^T$.
- Altså får vi for $t \in R$
$$e^{At} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$
- og derefter
$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} & \frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it} \\ \frac{1}{2}ie^{it} - \frac{1}{2}ie^{-it} & \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eksponentialmatricen exp(At)

- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

Eksponentialmatricen exp(At)

- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi
$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$
- (Differentiation af en matrix er elementvis differentiation). Bevis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k k t^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = Ae^{At}
\end{aligned}$$

Eksponentialmatricen exp(At)

- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi
$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$
- (Differentiation af en matrix er elementvis differentiation). Bevis:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = Ae^{At}\end{aligned}$$
- Den fuldstændige løsning til $\dot{x} = Ax$ er givet ved $x(t) = e^{At}c$.

Eksponentialmatricen exp(At)

- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi
$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$
- (Differentiation af en matrix er elementvis differentiation). Bevis:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = Ae^{At}\end{aligned}$$
- Den fuldstændige løsning til $\dot{x} = Ax$ er givet ved $x(t) = e^{At}c$.
- Bevis. At $x(t) = e^{At}c$ er en løsning følger af ovenstående.

Eksponentialmatricen exp(At)

- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi
$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$
- (Differentiation af en matrix er elementvis differentiation). Bevis:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = Ae^{At}\end{aligned}$$
- Den fuldstændige løsning til $\dot{x} = Ax$ er givet ved $x(t) = e^{At}c$.
- Bevis. At $x(t) = e^{At}c$ er en løsning følger af ovenstående.
- Af $\dot{x} = Ax$ følger $e^{-At}\dot{x} = e^{-At}Ax = Ae^{-At}x$, hvoraf fås $\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x} = 0$. Altså $e^{-At}x = c$ en konstant vektor.

Eksponentialmatricen exp(At)

- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi
$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$
- (Differentiation af en matrix er elementvis differentiation). Bevis:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = Ae^{At}\end{aligned}$$
- Den fuldstændige løsning til $\dot{x} = Ax$ er givet ved $x(t) = e^{At}c$.
- Bevis. At $x(t) = e^{At}c$ er en løsning følger af ovenstående.
- Af $\dot{x} = Ax$ følger $e^{-At}\dot{x} = e^{-At}Ax = Ae^{-At}x$, hvoraf fås $\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x} = 0$. Altså $e^{-At}x = c$ en konstant vektor.
- Men $e^{At}e^{-At} = I$ hvilket ses ved differentiation. Så $x = e^{At}c$.

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Bevis. $x(t) = e^{At}e^B$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^B$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^B\right) = Ae^{At}e^B = A\left(e^{At}e^B\right)$$

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Bevis. $x(t) = e^{At} e^B$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^B$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^B\right) = Ae^{At}e^B = A\left(e^{At}e^B\right)$$

- $x(t) = e^{At+B}$ er også løsning til $\dot{x} = Ax$ og har også $x(0) = e^B$.

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$.
- Bevis. $x(t) = e^{At}e^{B}$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^{B}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^{B}\right) = Ae^{At}e^{B} = A\left(e^{At}e^{B}\right)$$

- $x(t) = e^{At+B}$ er også løsning til $\dot{x} = Ax$ og har også $x(0) = e^{B}$.
- $(At+B)^2 = t^2A^2 + tAB + tBA + B^2 = t^2A^2 + 2tAB + B^2$.

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Bevis. $x(t) = e^{At}e^B$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^B$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^B\right) = Ae^{At}e^B = A\left(e^{At}e^B\right)$$

- $x(t) = e^{At+B}$ er også løsning til $\dot{x} = Ax$ og har også $x(0) = e^B$.
- $(At+B)^2 = t^2A^2 + tAB + tBA + B^2 = t^2A^2 + 2tAB + B^2$.
- Så $\frac{d}{dt}(At+B)^2 = 2tA^2 + 2AB = 2A(At+B)$.

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Bevis. $x(t) = e^{At}e^B$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^B$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^B\right) = Ae^{At}e^B = A\left(e^{At}e^B\right)$$

- $x(t) = e^{At+B}$ er også løsning til $\dot{x} = Ax$ og har også $x(0) = e^B$.
- $(At+B)^2 = t^2A^2 + tAB + tBA + B^2 = t^2A^2 + 2tAB + B^2$.
- Så $\frac{d}{dt}(At+B)^2 = 2tA^2 + 2AB = 2A(At+B)$.
- Generelt kan således vises $\frac{d}{dt}(At+B)^k = kA(At+B)^{k-1}$.

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Bevis. $x(t) = e^{At}e^B$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^B$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^B\right) = Ae^{At}e^B = A\left(e^{At}e^B\right)$$

- $x(t) = e^{At+B}$ er også løsning til $\dot{x} = Ax$ og har også $x(0) = e^B$.
- $(At+B)^2 = t^2A^2 + tAB + tBA + B^2 = t^2A^2 + 2tAB + B^2$.
- Så $\frac{d}{dt}(At+B)^2 = 2tA^2 + 2AB = 2A(At+B)$.
- Generelt kan således vises $\frac{d}{dt}(At+B)^k = kA(At+B)^{k-1}$.
- Herefter fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{At+B}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At+B)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A(At+B)^{k-} \\ &= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At+B)^k = Ae^{At+B}\end{aligned}$$

Gælder exp(A+B) = expb(A)exp(B)?

- Hvis A og B kommuterer, så gælder $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Bevis. $x(t) = e^{At}e^B$ er løsning til $\dot{x} = Ax$ og har $x(0) = e^B$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}e^B\right) = Ae^{At}e^B = A\left(e^{At}e^B\right)$$

- $x(t) = e^{At+B}$ er også løsning til $\dot{x} = Ax$ og har også $x(0) = e^B$.
- $(At+B)^2 = t^2A^2 + tAB + tBA + B^2 = t^2A^2 + 2tAB + B^2$.
- Så $\frac{d}{dt}(At+B)^2 = 2tA^2 + 2AB = 2A(At+B)$.
- Generelt kan således vises $\frac{d}{dt}(At+B)^k = kA(At+B)^{k-1}$.
- Herefter fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{At+B}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At+B)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A(At+B)^{k-1} \\ &= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At+B)^k = Ae^{At+B}\end{aligned}$$

- Entydighed af løsninger til $\dot{x} = Ax$ giver så, at $e^{At+B} = e^{At}e^B$.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.
- Vi vil bestemme analytiske løsninger for en differentialligning med 0 som ordinært punkt.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.
- Vi vil bestemme analytiske løsninger for en differentialligning med 0 som ordinært punkt.
- Vi har så
$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \text{ og } q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$$

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.
- Vi vil bestemme analytiske løsninger for en differentialligning med 0 som ordinært punkt.
- Vi har så

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \text{ og } q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$$

- I differentialligningen indsætter vi

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,\ y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^{n-1} \text{ og } y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, c_n t^{n-2}$$

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.
- Vi vil bestemme analytiske løsninger for en differentialligning med 0 som ordinært punkt.
- Vi har så

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \text{ og } q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$$

- I differentialligningen indsætter vi

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,\; y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^{n-1} \text{ og } y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, c_n t^{n-2}$$

- Vi nøjes med at betragte et eksempel.

Eksempel: Ordinært punkt I

- Betragt differentialligningen $y'' - 2ty' + \nu y = 0$.

Eksempel: Ordinært punkt I

- Betragt differentialligningen $y'' - 2ty' + \nu y = 0$.
- I differentialligningen indsætter vi $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Eksempel: Ordinært punkt I

- Betragt differentialligningen $y'' - 2ty' + \nu y = 0$.
- I differentialligningen indsætter vi $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.
- Herved fås

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^{n-1} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

Eksempel: Ordinært punkt I

- Betragt differentialligningen $y'' - 2ty' + \nu y = 0$.
- I differentialligningen indsætter vi $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.
- Herved fås

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^{n-1} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

- Skift summationsvariabel i første sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

Eksempel: Ordinært punkt I

- Betragt differentialligningen $y'' - 2ty' + \nu y = 0$.
- I differentialligningen indsætter vi $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.
- Herved fås

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^{n-1} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

- Skift summationsvariabel i første sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

- Altså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-\nu)c_n\right) t^n = 0$$

Eksempel: Ordinært punkt I

- Betragt differentialligningen $y'' - 2ty' + \nu y = 0$.
- I differentialligningen indsætter vi $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.
- Herved fås

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^{n-1} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

- Skift summationsvariabel i første sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n t^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

- Altså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n - \nu) c_n\right) t^n = 0$$

- Rekursionsformlen er nu $(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n - \nu) c_n = 0$ for alle $n \geq 0$.

Eksempel: Ordinært punkt II

- Rekursionsformlen kan skrives

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

Eksempel: Ordinært punkt II

- Rekursionsformlen kan skrives

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- men også (for $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

Eksempel: Ordinært punkt II

- Rekursionsformlen kan skrives
$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$
- men også (for $n \geq 2$):
$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$
- Vi bestemmer først den løsning, der svarer til $c_0 = 1$ og $c_1 = 0$.

Eksempel: Ordinært punkt II

- Rekursionsformlen kan skrives

$$c_{n+2} = \frac{(2n-\nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- men også (for $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n-4-\nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

- Vi bestemmer først den løsning, der svarer til $c_0 = 1$ og $c_1 = 0$.
- Vi finder så successivt:

$$c_2 = \frac{-\nu}{2}, c_3 = 0, c_4 = \frac{(4-\nu)\,(-\nu)}{4\cdot 3\cdot 2}, c_5 = 0, c_6 = \frac{(8-\nu)\,(4-\nu)\,(-\nu)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

Eksempel: Ordinært punkt II

- Rekursionsformlen kan skrives

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- men også (for $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

- Vi bestemmer først den løsning, der svarer til $c_0 = 1$ og $c_1 = 0$.
- Vi finder så successivt:

$$c_2 = \frac{-\nu}{2}, c_3 = 0, c_4 = \frac{(4-\nu)\,(-\nu)}{4 \cdot 3 \cdot 2}, c_5 = 0, c_6 = \frac{(8-\nu)\,(4-\nu)\,(-\nu)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

- Generelt for $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_{2k-1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(4k-4-\nu)\cdots(8-\nu)\,(4-\nu)\,(-\nu)}{(2k)!} \end{aligned}$$

Eksempel: Ordinært punkt III

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

Eksempel: Ordinært punkt III

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

- Vi bestemmer nu den løsning, der svarer til $c_0 = 0$ og $c_1 = 1$.

Eksempel: Ordinært punkt III

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

- Vi bestemmer nu den løsning, der svarer til $c_0 = 0$ og $c_1 = 1$.
- Vi finder så med det samme, at $c_{2k} = 0$ for $k \geq 0$.

Eksempel: Ordinært punkt III

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

- Vi bestemmer nu den løsning, der svarer til $c_0 = 0$ og $c_1 = 1$.
- Vi finder så med det samme, at $c_{2k} = 0$ for $k \geq 0$.
- Dernæst

$$c_3 = \frac{2 - \nu}{3 \cdot 2}, c_5 = \frac{(6 - \nu)\,(2 - \nu)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, c_7 = \frac{(10 - \nu)\,(6 - \nu)\,(2 - \nu)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

Eksempel: Ordinært punkt III

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_n = \frac{(2n - 4 - \nu)\, c_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

- Vi bestemmer nu den løsning, der svarer til $c_0 = 0$ og $c_1 = 1$.
- Vi finder så med det samme, at $c_{2k} = 0$ for $k \geq 0$.
- Dernæst

$$c_3 = \frac{2-\nu}{3 \cdot 2}, c_5 = \frac{(6-\nu)\,(2-\nu)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, c_7 = \frac{(10-\nu)\,(6-\nu)\,(2-\nu)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

- Generelt for $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= 0 \\ c_{2k+1} &= \frac{(4k-2-\nu)\cdots(10-\nu)\,(6-\nu)\,(2-\nu)}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Eksempel: Ordinært punkt IV

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

Eksempel: Ordinært punkt IV

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- Vi bestemmer konvergensradius for de to løsninger. Vi har for alle $t \neq 0$:

$$\left| \frac{c_{n+2} t^{n+2}}{c_n t^n} \right| = \frac{|2n - \nu|}{(n+2)\,(n+1)} \, |t|^2 \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Eksempel: Ordinært punkt IV

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- Vi bestemmer konvergensradius for de to løsninger. Vi har for alle $t \neq 0$:

$$\left| \frac{c_{n+2}\, t^{n+2}}{c_n\, t^n} \right| = \frac{|2n - \nu|}{(n+2)\,(n+1)} \left| t \right|^2 \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

- Heraf følger, at begge de fundne rækkeløsninger har konvergensradius ∞.

Eksempel: Ordinært punkt IV

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- Vi bestemmer konvergensradius for de to løsninger. Vi har for alle $t \neq 0$:

$$\left| \frac{c_{n+2} t^{n+2}}{c_n t^n} \right| = \frac{|2n - \nu|}{(n+2)\,(n+1)} \, |t|^2 \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

- Heraf følger, at begge de fundne rækkeløsninger har konvergensradius ∞.
- Når $\nu = 4k$ for et helt tal $k \geq 0$ er den først fundne løsning et polynomium.

Eksempel: Ordinært punkt IV

- Rekursionsformlen (med $n \geq 2$):

$$c_{n+2} = \frac{(2n - \nu)\, c_n}{(n+2)\,(n+1)}$$

- Vi bestemmer konvergensradius for de to løsninger. Vi har for alle $t \neq 0$:

$$\left| \frac{c_{n+2}\, t^{n+2}}{c_n\, t^n} \right| = \frac{|2n - \nu|}{(n+2)\,(n+1)}\, |t|^2 \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

- Heraf følger, at begge de fundne rækkeløsninger har konvergensradius ∞.
- Når $\nu = 4k$ for et helt tal $k \geq 0$ er den først fundne løsning et polynomium.
- Når $\nu = 4k + 2$ for et helt tal $k \geq 0$ er den sidst fundne løsning et polynomium.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p\left(t\right)y' + q\left(t\right)y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t - a)\, p(t)$ og $(t - a)^2\, q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\, p(t)$ og $(t-a)^2\, q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.
- Vi vil bestemme rækkeløsninger for en differentialligning med 0 som regulært singulært punkt.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\,p(t)$ og $(t-a)^2\,q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.
- Vi vil bestemme rækkeløsninger for en differentialligning med 0 som regulært singulært punkt.
- I differentialligningen indsætter vi for en endnu ukendt værdi af r:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r},\ y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,c_n t^{n+r-1} \\ y''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\,c_n t^{n+r-2} \end{aligned}$$

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\,p(t)$ og $(t-a)^2\,q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.
- Vi vil bestemme rækkeløsninger for en differentialligning med 0 som regulært singulært punkt.
- I differentialligningen indsætter vi for en endnu ukendt værdi af r:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r},\; y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,c_n t^{n+r-1} \\ y''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\,c_n t^{n+r-2} \end{aligned}$$

- Vi nøjes igen med at betragte et eksempel.

Eksempel: Regulært singulært punkt I

- Betragt differentialligningen $t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - 1\right) y = 0$.

Eksempel: Regulært singulært punkt I

- Betragt differentialligningen $t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - 1\right) y = 0$.
- Vi indsætter $y\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$, hvor vi af hensyn til bestemmelsen af r insisterer på, at $c_0 \neq 0$.

Eksempel: Regulært singulært punkt I

- Betragt differentialligningen $t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - 1\right) y = 0$.
- Vi indsætter $y\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$, hvor vi af hensyn til bestemmelsen af r insisterer på, at $c_0 \neq 0$.
- Herved fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+r\right)\left(n+r-1\right) c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+r\right) c_n t^{n+r} + \left(t^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

Eksempel: Regulært singulært punkt I

- Betragt differentialligningen $t^2y'' + ty' + \left(t^2 - 1\right) y = 0$.
- Vi indsætter $y\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$, hvor vi af hensyn til bestemmelsen af r insisterer på, at $c_0 \neq 0$.
- Herved fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n t^{n+r} + \left(t^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

- Sidste led skrives om:

$$\begin{aligned} \left(t^2 - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} \end{aligned}$$

- Betragt differentialligningen $t^2y'' + ty' + \left(t^2 - 1\right) y = 0$.
- Vi indsætter $y\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$, hvor vi af hensyn til bestemmelsen af r insisterer på, at $c_0 \neq 0$.
- Herved fås

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)c_n t^{n+r} + \left(t^2-1\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

- Sidste led skrives om:

$$\begin{aligned}\left(t^2-1\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}\end{aligned}$$

- Idet vi sætter $c_{-2} = c_{-1} = 0$ har vi nu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)c_n + \left(n+r\right)c_n + c_{n-2} - c_n\right)t^{n+r} = 0$$

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}\right]t^{n+r}=0$$

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((n+r)^2 - 1 \right) c_n + c_{n-2} \right] t^{n+r} = 0$$

- Vi har nu, at $\left((n+r)^2 - 1 \right) c_n + c_{n-2} = 0$ for alle $n \geq 0$.

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}\right]t^{n+r}=0$$

- Vi har nu, at $\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}=0$ for alle $n\geq 0$.
- Sættes $n=0$ fås indeksligningen $r^2-1=0$ med rødderne $r=\pm 1$.

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((n+r)^2 - 1 \right) c_n + c_{n-2} \right] t^{n+r} = 0$$

- Vi har nu, at $\left((n+r)^2 - 1 \right) c_n + c_{n-2} = 0$ for alle $n \geq 0$.
- Sættes $n = 0$ fås indeksligningen $r^2 - 1 = 0$ med rødderne $r = \pm 1$.
- $n = 1$ giver, at vi nødvendigvis har $c_1 = 0$ (uanset valget af r).

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((n+r)^2 - 1 \right) c_n + c_{n-2} \right] t^{n+r} = 0$$

- Vi har nu, at $\left((n+r)^2 - 1 \right) c_n + c_{n-2} = 0$ for alle $n \geq 0$.
- Sættes $n = 0$ fås indeksligningen $r^2 - 1 = 0$ med rødderne $r = \pm 1$.
- $n = 1$ giver, at vi nødvendigvis har $c_1 = 0$ (uanset valget af r).
- Vi betragter nu tilfældet $r = 1$. Rekursionsformlen er da (med $n \geq 2$)

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{(n+2)\,n}$$

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}\right]t^{n+r}=0$$

- Vi har nu, at $\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}=0$ for alle $n\geq 0$.
- Sættes $n=0$ fås indeksligningen $r^2-1=0$ med rødderne $r=\pm 1$.
- $n=1$ giver, at vi nødvendigvis har $c_1=0$ (uanset valget af r).
- Vi betragter nu tilfældet $r=1$. Rekursionsformlen er da (med $n\geq 2$)

$$c_n=\frac{-c_{n-2}}{(n+2)\,n}$$

- Vi så, at $c_1=0$. Men så fås også $c_3=c_5=c_7=\ldots=0$.

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Dette kan simplificeres til

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}\right]t^{n+r}=0$$

- Vi har nu, at $\left((n+r)^2-1\right)c_n+c_{n-2}=0$ for alle $n\geq 0$.
- Sættes $n=0$ fås indeksligningen $r^2-1=0$ med rødderne $r=\pm 1$.
- $n=1$ giver, at vi nødvendigvis har $c_1=0$ (uanset valget af r).
- Vi betragter nu tilfældet $r=1$. Rekursionsformlen er da (med $n\geq 2$)

$$c_n=\frac{-c_{n-2}}{(n+2)\,n}$$

- Vi så, at $c_1=0$. Men så fås også $c_3=c_5=c_7=\ldots=0$.
- Med $c_0=1$ fås

$$c_2=\frac{-1}{4\cdot 2},\ c_4=\frac{(-1)^2}{6\cdot 4\cdot 4\cdot 2},\ c_6=\frac{(-1)^3}{8\cdot 6\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2},\ c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k+1)!k!}$$

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Løsningen er dermed

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k+1)!k!} t^{2k+1}$$

- Løsningen er dermed

$$y\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}t^{n+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{2^{2k}\left(k+1\right)!k!}t^{2k+1}$$

- Kvotientkriteriet:

$$\left|\frac{c_{2k}t^{2k+1}}{c_{2k-2}t^{2k-1}}\right|=\frac{1}{\left(2k+2\right)2k}\left|t\right|^{2}\rightarrow 0 \text{ for } k\rightarrow\infty$$

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Løsningen er dermed

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k+1)!k!} t^{2k+1}$$

- Kvotientkriteriet:

$$\left| \frac{c_{2k} t^{2k+1}}{c_{2k-2} t^{2k-1}} \right| = \frac{1}{(2k+2)\,2k} |t|^2 \to 0 \text{ for } k \to \infty$$

- Konvergensradius er uendelig.

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Løsningen er dermed

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k+1)!k!} t^{2k+1}$$

- Kvotientkriteriet:

$$\left| \frac{c_{2k} t^{2k+1}}{c_{2k-2} t^{2k-1}} \right| = \frac{1}{(2k+2)\,2k} |t|^2 \to 0 \text{ for } k \to \infty$$

- Konvergensradius er uendelig.
- Forsøges med $r = -1$ fås af $\left((n+r)^2 - 1\right) c_n + c_{n-2} = 0$ for $n \geq 0$ kravet

$$n(n-2)\,c_n + c_{n-2} = 0$$

Eksempel: Regulært singulært punkt II

- Løsningen er dermed

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k+1)!k!} t^{2k+1}$$

- Kvotientkriteriet:

$$\left| \frac{c_{2k} t^{2k+1}}{c_{2k-2} t^{2k-1}} \right| = \frac{1}{(2k+2)\,2k} |t|^2 \to 0 \text{ for } k \to \infty$$

- Konvergensradius er uendelig.
- Forsøges med $r = -1$ fås af $\left((n+r)^2 - 1\right) c_n + c_{n-2} = 0$ for $n \geq 0$ kravet

$$n(n-2)\,c_n + c_{n-2} = 0$$

- Dette kan ikke opfyldes for $n = 2$. Der er derfor ingen løsning svarende til $r = -1$.