Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

27. november 2006

Overføringsfunktioner for systemer I

- I afsnit 2.6 (uge 3) betragtede vi systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.

Overføringsfunktioner for systemer I

- I afsnit 2.6 (uge 3) betragtede vi systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{1}$$

  hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.

Overføringsfunktioner for systemer I

- I afsnit 2.6 (uge 3) betragtede vi systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad (1)$$

  hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- Vi lader $u(t) = e^{st}$ og spørger, om systemet (1) har en løsning i x af formen $x(t) = e^{st} x_0$.

- I afsnit 2.6 (uge 3) betragtede vi systemer af formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{1}$$

hvor A er en konstant kvadratisk matrix, og b og c er konstante søjlevektorer.

- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- Vi lader $u(t) = e^{st}$ og spørger, om systemet (1) har en løsning i x af formen $x(t) = e^{st}x_0$.
- Når s ikke er en egenværdi for A (altså når $\det(A - sI) \neq 0$), så er der præcis én løsning for x_0, nemlig

$$x_0 = -(A - sI)^{-1} b$$

Overføringsfunktioner for systemer II

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\,e^{st}$$

hvor overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = -c^{T}(A - sI)^{-1}\,b$$

Overføringsfunktioner for systemer II

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

hvor overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = -c^{T}(A - sI)^{-1}\, b$$

- Amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken defineres ved

$$H(i\omega) = \mathcal{A}(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}$$

Overføringsfunktioner for systemer II

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

hvor overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$$

- Amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken defineres ved

$$H(i\omega) = \mathcal{A}(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}$$

- Altså

$$\mathcal{A}(\omega) = |H(i\omega)|, \quad \phi(\omega) = Arg(H(i\omega))$$

hvor $\omega > 0$.

Overføringsfunktioner for systemer II

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y\left(t\right) = H\left(s\right)e^{st}$$

hvor overføringsfunktionen H er givet ved

$$H\left(s\right) = -c^T\left(A - sI\right)^{-1}b$$

- Amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken defineres ved

$$H\left(i\omega\right) = \mathcal{A}\left(\omega\right)e^{i\phi(\omega)}$$

- Altså

$$\mathcal{A}\left(\omega\right) = \left|H\left(i\omega\right)\right|, \quad \phi\left(\omega\right) = Arg\left(H\left(i\omega\right)\right)$$

hvor $\omega > 0$.

- Hvis altså $u\left(t\right) = e^{int}$, så har vi $y\left(t\right) = H\left(in\right)e^{int}$ forudsat, at in ikke er egenværdi for matricen A.

Overføringsfunktioner for systemer II

- Løsningen i y (når s ikke er en egenværdi) er

$$y(t) = H(s)\, e^{st}$$

hvor overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = -c^T (A - sI)^{-1}\, b$$

- Amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken defineres ved

$$H(i\omega) = \mathcal{A}(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}$$

- Altså

$$\mathcal{A}(\omega) = |H(i\omega)|, \quad \phi(\omega) = Arg(H(i\omega))$$

hvor $\omega > 0$.

- Hvis altså $u(t) = e^{int}$, så har vi $y(t) = H(in)\, e^{int}$ forudsat, at in ikke er egenværdi for matricen A.
- Systemet er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis alle egenværdier for A har negativ realdel.

Periodisk påvirkning I

- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel.

Periodisk påvirkning I

- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel.
- Så kan $u(t)$ for alle $t \in R$ skrives

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Periodisk påvirkning I

- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel.
- Så kan $u(t)$ for alle $t \in R$ skrives

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

- Fourierrækkens N'te afsnit er

$$u_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

Periodisk påvirkning I

- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel.
- Så kan $u(t)$ for alle $t \in R$ skrives

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

- Fourierrækkens N'te afsnit er

$$u_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

- Hvis $u(t)$ i første omgang erstattes af $u_N(t)$, så er svaret

$$y_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}$$

Periodisk påvirkning I

- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel.
- Så kan $u(t)$ for alle $t \in R$ skrives

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

- Fourierrækkens N'te afsnit er

$$u_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

- Hvis $u(t)$ i første omgang erstattes af $u_N(t)$, så er svaret

$$y_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}$$

- Sætning 7.9. Lad A være asymptotisk stabil. Svaret på u er da

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$$

Periodisk påvirkning II

- Antag, at Fourierrækken for u er givet på reel form:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

Periodisk påvirkning II

- Antag, at Fourierrækken for u er givet på reel form:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

- Vi skal vise, at svaret y kan skrives på formen

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(n)\, a_n \cos(nt + \phi(n)) + \mathcal{A}(n)\, b_n \sin(nt + \phi(n)) \end{aligned}$$

Periodisk påvirkning II

- Antag, at Fourierrækken for u er givet på reel form:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

- Vi skal vise, at svaret y kan skrives på formen

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(n)\, a_n \cos(nt + \phi(n)) + \mathcal{A}(n)\, b_n \sin(nt + \phi(n)) \end{aligned}$$

- Med $b_0 = 0$ har vi

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{for} \quad n \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

Periodisk påvirkning III

- Ved indsættelse i $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$ fås

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) H(in) e^{int} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) H(in) e^{int}$$

Periodisk påvirkning III

- Ved indsættelse i $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in)\, e^{int}$ fås

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})\, H(in)\, e^{int} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\, H(in)\, e^{int}$$

- I første sum udnytter vi, at $\overline{H(in)} = H(-in)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})\, H(in)\, e^{int} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\, H(-in)\, e^{-int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\, H(in)\, e^{int}}
\end{aligned}$$

Periodisk påvirkning III

- Ved indsættelse i $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$ fås

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) H(in) e^{int} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) H(in) e^{int}$$

- I første sum udnytter vi, at $\overline{H(in)} = H(-in)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) H(in) e^{int} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n) H(-in) e^{-int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\frac{1}{2}(a_n - ib_n) H(in) e^{int}}\end{aligned}$$

- Hermed er første sum den kompleks konjugerede af anden sum, bortset fra det 0'te led. Så vi får

$$y(t) = \frac{a_0}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left((a_n - ib_n) H(in) e^{int}\right)$$

Periodisk påvirkning IV

- Altså (og idet $\mathcal{A}(0) = H(0)$) fås

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\left(a_n - ib_n\right) H(in)\, e^{int}\right) \\
&= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\left(a_n - ib_n\right) am(n)\, e^{i(nt+\phi(n))}\right) \\
&= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(n)\, a_n \cos\left(nt + \phi(n)\right) + \mathcal{A}(n)\, b_n \sin\left(nt + \phi(n)\right)
\end{aligned}
$$

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

- hvor A, b og c er givet som i Eks. 2.22 og 2.24 ved

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

- hvor A, b og c er givet som i Eks. 2.22 og 2.24 ved

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for A er -4 og -1. Systemet er asymptotisk stabilt.

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

- hvor A, b og c er givet som i Eks. 2.22 og 2.24 ved

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for A er -4 og -1. Systemet er asymptotisk stabilt.
- Overføringsfunktionen blev fundet til

$$H(s) = \frac{4}{s+1}$$

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

- hvor A, b og c er givet som i Eks. 2.22 og 2.24 ved

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for A er -4 og -1. Systemet er asymptotisk stabilt.
- Overføringsfunktionen blev fundet til

$$H(s) = \frac{4}{s+1}$$

- Vi tager nu u til at være den 2π-periodiske funktion, som på intervallet $[-\pi, \pi]$ er givet ved $u(t) = |t|$.

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x\end{aligned}$$

- hvor A, b og c er givet som i Eks. 2.22 og 2.24 ved

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for A er -4 og -1. Systemet er asymptotisk stabilt.
- Overføringsfunktionen blev fundet til

$$H(s) = \frac{4}{s+1}$$

- Vi tager nu u til at være den 2π-periodiske funktion, som på intervallet $[-\pi, \pi]$ er givet ved $u(t) = |t|$.
- u er dermed kontinuert og stykkevist differentiabel.

Eksempel 7.10 I

- Systemet er

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + bu \\
y &= c^T x
\end{aligned}
$$

- hvor A, b og c er givet som i Eks. 2.22 og 2.24 ved

$$
A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

- Egenværdierne for A er -4 og -1. Systemet er asymptotisk stabilt.
- Overføringsfunktionen blev fundet til

$$
H(s) = \frac{4}{s+1}
$$

- Vi tager nu u til at være den 2π-periodiske funktion, som på intervallet $[-\pi, \pi]$ er givet ved $u(t) = |t|$.
- u er dermed kontinuert og stykkevist differentiabel.
- Alle forudsætningerne i sætning 7.9 er hermed opfyldt.

Eksempel 7.10 II

- u er summen af sin Fourierrække:

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

Eksempel 7.10 II

- u er summen af sin Fourierrække:

$$u\left(t\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^{2}}\cos\left(\left(2k-1\right)t\right)$$

- På kompleks form er Fourierrækken

$$u\left(t\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^{2}}e^{i\left(2k-1\right)t}$$

Eksempel 7.10 II

- u er summen af sin Fourierrække:

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

- På kompleks form er Fourierrækken

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{i(2k-1)t}$$

- Idet

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int} \text{ og } H(in) = \frac{4}{1+in}$$

Eksempel 7.10 II

- u er summen af sin Fourierrække:

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

- På kompleks form er Fourierrækken

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{i(2k-1)t}$$

- Idet

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int} \text{ og } H(in) = \frac{4}{1+in}$$

- fås svaret på kompleks form

$$y(t) = 2\pi - \frac{8}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+i(2k-1))(2k-1)^2} e^{i(2k-1)t}$$

Eksempel 7.10 III

- Idet den polære form for $H(in)$ er

$$H(in) = \frac{4}{1+in} = \frac{4}{\sqrt{1+n^2}} e^{-i \arctan n}$$

Eksempel 7.10 III

- Idet den polære form for $H(in)$ er

$$H(in) = \frac{4}{1+in} = \frac{4}{\sqrt{1+n^2}} e^{-i \arctan n}$$

- fås svaret på reel form til

$$y(t) = 2\pi - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2k-1)t - \arctan(2k-1)\right)}{\sqrt{1+(2k-1)^2}\,(2k-1)^2}$$

Eksempel 7.10 III

- Idet den polære form for $H(in)$ er

$$H(in) = \frac{4}{1+in} = \frac{4}{\sqrt{1+n^2}} e^{-i \arctan n}$$

- fås svaret på reel form til

$$y(t) = 2\pi - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2k-1)t - \arctan(2k-1)\right)}{\sqrt{1+(2k-1)^2}\,(2k-1)^2}$$

- Dette kan ved anvendelse af $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ og

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Eksempel 7.10 III

- Idet den polære form for $H(in)$ er

$$H(in) = \frac{4}{1+in} = \frac{4}{\sqrt{1+n^2}} e^{-i \arctan n}$$

- fås svaret på reel form til

$$y(t) = 2\pi - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2k-1)t - \arctan(2k-1)\right)}{\sqrt{1+(2k-1)^2}\,(2k-1)^2}$$

- Dette kan ved anvendelse af $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ og

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- skrives

$$y(t) = 2\pi - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t) + (2k-1)\sin((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)^2}$$

Eksempel 7.10 IV

- Med

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2\pi - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)^2} \\
&\quad + \frac{\sin((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)}
\end{aligned}
$$

Eksempel 7.10 IV

- Med

$$y(t) = 2\pi - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)^2} + \frac{\sin((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)}$$

- fås, at $|y(t) - y_N(t)|$ er mindre end eller lig med

$$\frac{16}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)^2} + \frac{1}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)}$$

Eksempel 7.10 IV

- Med

$$y(t) = 2\pi - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)^2} + \frac{\sin((2k-1)t)}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)}$$

- fås, at $|y(t) - y_N(t)|$ er mindre end eller lig med

$$\frac{16}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)^2} + \frac{1}{\left(1+(2k-1)^2\right)(2k-1)}$$

- som igen er mindre end eller lig med

$$\frac{16}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{1}{(2k-1)^3} = \frac{32}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^4}$$

Eksempel 7.10 V

- Korollar 4.21 (i) med$N$ erstattet af $N-1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

Eksempel 7.10 V

- Korollar 4.21 (i) med$N$ erstattet af $N-1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) < \int_{N}^{\infty} f(x)\, dx$$

- Med $f(x) = x(2x-1)^{-4}$ fås

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^4} < \int_{N}^{\infty} \frac{x}{(2x-1)^4} dx = \frac{1}{24} \frac{6N-1}{(2N-1)^3}$$

Eksempel 7.10 V

- Korollar 4.21 (i) med$N$ erstattet af $N-1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) < \int_{N}^{\infty} f(x)\, dx$$

- Med $f(x) = x(2x-1)^{-4}$ fås

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^4} < \int_{N}^{\infty} \frac{x}{(2x-1)^4} dx = \frac{1}{24} \frac{6N-1}{(2N-1)^3}$$

- Altså

$$|y(t) - y_N(t)| < \frac{4(6N-1)}{3\pi (2N-1)^3}$$

Eksempel 7.10 V

- Korollar 4.21 (i) med$N$ erstattet af $N-1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Med $f(x) = x(2x-1)^{-4}$ fås

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^4} < \int_{N}^{\infty} \frac{x}{(2x-1)^4}\,dx = \frac{1}{24}\frac{6N-1}{(2N-1)^3}$$

- Altså

$$|y(t) - y_N(t)| < \frac{4(6N-1)}{3\pi(2N-1)^3}$$

- Ønskes N bestemt, så $|y(t) - y_N(t)| \leq 0.01$ for alle t, er det nok at forlange

$$\frac{4(6N-1)}{3\pi(2N-1)^3} \leq 0.01$$

hvilket allerede er opfyldt for $N = 7$.

Definition af effekt

- I vektorrummet $L^2(-\pi, \pi)$ definerede vi skalarproduktet mellem to funktioner ved
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Definition af effekt

- I vektorrummet $L^2(-\pi, \pi)$ definerede vi skalarproduktet mellem to funktioner ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)} dt$$
- Normen defineredes ved
$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definition af effekt

- I vektorrummet $L^2(-\pi, \pi)$ definerede vi skalarproduktet mellem to funktioner ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)} dt$$
- Normen defineredes ved
$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
- Effekten af f defineres nu simpelthen som
$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

Definition af effekt

- I vektorrummet $L^2(-\pi,\pi)$ definerede vi skalarproduktet mellem to funktioner ved
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$
- Normen defineredes ved
$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
- Effekten af f defineres nu simpelthen som
$$P(f) = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$$
- Lad $f \in L^2(-\pi,\pi)$ have Fourierækken
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \text{ eller } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

Gensyn med Parseval

- Ifølge Parsevals sætning har vi

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

Gensyn med Parseval

- Ifølge Parsevals sætning har vi

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| c_n^2 \right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

- Hvis S_N betegner det N'te afsnit af Fourierrækken har vi

$$P(S_N) = \sum_{n=-N}^{N} \left| c_n^2 \right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

Gensyn med Parseval

- Ifølge Parsevals sætning har vi

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

- Hvis S_N betegner det N'te afsnit af Fourierrækken har vi

$$P(S_N) = \sum_{n=-N}^{N} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

- Vi ser, at

$$P(S_N) = P(f) - \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = P(f) - \sum_{|n|\geq N+1} \left|c_n^2\right|$$

Gensyn med Parseval

- Ifølge Parsevals sætning har vi

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

- Hvis S_N betegner det N'te afsnit af Fourierrækken har vi

$$P(S_N) = \sum_{n=-N}^{N} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

- Vi ser, at

$$P(S_N) = P(f) - \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = P(f) - \sum_{|n|\geq N+1} \left|c_n^2\right|$$

- Ønskes N bestemt, så $P(S_N) \geq \delta P(f)$ skal vi vælge N, så

$$\sum_{|n|\geq N+1} \left|c_n^2\right| = \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \leq (1-\delta) P(f)$$

Eksempel 7.13

- $f(t) = t$ for $t \in [-\pi, \pi[$. Fourierrækken er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

Eksempel 7.13

- $f(t) = t$ for $t \in [-\pi, \pi[$. Fourierrækken er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

- Effekten af f er

$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Eksempel 7.13

- $f(t) = t$ for $t \in [-\pi, \pi[$. Fourierrækken er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

- Effekten af f er

$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

- Vil bestemme N, så 90% af effekten er indeholdt i S_N. Kræver, at

$$\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n^2 = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq (1 - 0.9) P(f) = 0.1 \frac{\pi^2}{3}$$

Eksempel 7.13

- $f(t) = t$ for $t \in [-\pi, \pi[$. Fourierrækken er
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$
- Effekten af f er
$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$
- Vil bestemme N, så 90% af effekten er indeholdt i S_N. Kræver, at
$$\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n^2 = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq (1-0.9) P(f) = 0.1 \frac{\pi^2}{3}$$
- Men
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{N}$$

Eksempel 7.13

- $f(t) = t$ for $t \in [-\pi, \pi[$. Fourierrækken er
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$
- Effekten af f er
$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$
- Vil bestemme N, så 90% af effekten er indeholdt i S_N. Kræver, at
$$\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n^2 = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq (1 - 0.9) P(f) = 0.1 \frac{\pi^2}{3}$$
- Men
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{N}$$
- Så det er nok at kræve $\frac{2}{N} \leq 0.1 \frac{\pi^2}{3}$, hvilket er opfyldt, når blot $N \geq 7$.