Signaler og Lineære Systemer

Preben Alsholm

4. december 2006

Lineære differentialligninger med konstante koefficienter

- Lineær differentialligning af n'te orden

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t), \quad t \in I$$

Lineære differentialligninger med konstante koefficienter

- Lineær differentialligning af n'te orden

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u\left(t\right), \quad t \in I$$

- Homogene, inhomogene ligninger, struktursætningen, karakterligningen.

Lineære differentialligninger med konstante koefficienter

- Lineær differentialligning af n'te orden

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t)\,, \quad t \in I$$

- Homogene, inhomogene ligninger, struktursætningen, karakterligningen.
- Overføringsfunktion for ligning af formen

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \\ = \quad & b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u \end{aligned}$$

Lineære differentialligninger med konstante koefficienter

- Lineær differentialligning af n'te orden

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t), \quad t \in I$$

- Homogene, inhomogene ligninger, struktursætningen, karakterligningen.
- Overføringsfunktion for ligning af formen

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \\ = \quad & b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u \end{aligned}$$

- Overføringsfunktionen $H(s)$ bestemmes så påvirkningen $u(t) = e^{st}$ giver et svar $y(t) = H(s) e^{st}$.

Lineære differentialligninger med konstante koefficienter

- Lineær differentialligning af n'te orden

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t), \quad t \in I$$

- Homogene, inhomogene ligninger, struktursætningen, karakterligningen.
- Overføringsfunktion for ligning af formen

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \\ = \quad & b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u \end{aligned}$$

- Overføringsfunktionen $H(s)$ bestemmes så påvirkningen $u(t) = e^{st}$ giver et svar $y(t) = H(s) e^{st}$.
- Vi har

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Frekvenskarakteristikker

- Betragt tilfældet $s = i\omega$, hvor $\omega \geq 0$. Vi kan skrive

$$H\left(i\omega\right)e^{i\omega t} = \left|H\left(i\omega\right)\right| e^{i\left(ArgH\left(iw\right)+\omega t\right)}$$

Frekvenskarakteristikker

- Betragt tilfældet $s = i\omega$, hvor $\omega \geq 0$. Vi kan skrive

$$H(i\omega)\, e^{i\omega t} = |H(i\omega)|\, e^{i(ArgH(iw)+\omega t)}$$

- Amplitudekarakteristikken A er givet ved

$$A(\omega) = |H(i\omega)|$$

Frekvenskarakteristikker

- Betragt tilfældet $s = i\omega$, hvor $\omega \geq 0$. Vi kan skrive

$$H(i\omega)\, e^{i\omega t} = |H(i\omega)|\, e^{i(ArgH(iw)+\omega t)}$$

- Amplitudekarakteristikken A er givet ved

$$A(\omega) = |H(i\omega)|$$

- Fasekarakteristikken ϕ er givet ved

$$\phi(\omega) = Arg(H(i\omega))$$

Lineært differentialligningssystem af 1. orden

- Lad A være en kvadratisk matrix med konstante elementer. Betragt systemet $\dot{x} = Ax + u(t)$.

Lineært differentialligningssystem af 1. orden

- Lad A være en kvadratisk matrix med konstante elementer. Betragt systemet $\dot{x} = Ax + u(t)$.
- Det homogene system $\dot{x} = Ax$. Egenværdier og egenvektorer. A diagonaliserbar, A ikke diagonaliserbar.

Lineært differentialligningssystem af 1. orden

- Lad A være en kvadratisk matrix med konstante elementer. Betragt systemet $\dot{x} = Ax + u(t)$.
- Det homogene system $\dot{x} = Ax$. Egenværdier og egenvektorer. A diagonaliserbar, A ikke diagonaliserbar.
- Det inhomogene system: Struktursætningen. Gætning eller løsning ved fundamentalmatrix:

$$x(t) = \Phi(t)\, c + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Lineært differentialligningssystem af 1. orden

- Lad A være en kvadratisk matrix med konstante elementer. Betragt systemet $\dot{x} = Ax + u(t)$.
- Det homogene system $\dot{x} = Ax$. Egenværdier og egenvektorer. A diagonaliserbar, A ikke diagonaliserbar.
- Det inhomogene system: Struktursætningen. Gætning eller løsning ved fundamentalmatrix:

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

- Omskrivning af n'te-ordens differentialligning til førsteordens system.

Overføringsfunktioner for systemer

- Systemer af formen

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ med } y = c^T x$$

Overføringsfunktioner for systemer

- Systemer af formen

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ med } y = c^T x$$

- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.

Overføringsfunktioner for systemer

- Systemer af formen

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ med } y = c^T x$$

- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- Med $u(t) = e^{st}$ er $H(s)$ bestemt, så $y(t) = H(s)e^{st}$ er en løsning.

Overføringsfunktioner for systemer

- Systemer af formen

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ med } y = c^T x$$

- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- Med $u(t) = e^{st}$ er $H(s)$ bestemt, så $y(t) = H(s)e^{st}$ er en løsning.
- Når s ikke er en egenværdi for A, så er der præcis én løsning nemlig $H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$.

Overføringsfunktioner for systemer

- Systemer af formen

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ med } y = c^T x$$

- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- Med $u(t) = e^{st}$ er $H(s)$ bestemt, så $y(t) = H(s)e^{st}$ er en løsning.
- Når s ikke er en egenværdi for A, så er der præcis én løsning nemlig $H(s) = -c^T(A - sI)^{-1}b$.
- Amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken defineres ved $H(i\omega) = \mathcal{A}(\omega)e^{i\phi(\omega)}$. Altså

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega) &= |H(i\omega)| \\ \phi(\omega) &= Arg(H(i\omega)) \end{aligned}$$

Stabilitet for homogene systemer

- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$.

Stabilitet for homogene systemer

- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

Stabilitet for homogene systemer

- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \longrightarrow 0$ for $t \longrightarrow \infty$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis enhver egenværdi λ med $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ har samme algebraisk og geometrisk multiplicitet.

Stabilitet for homogene systemer

- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis enhver egenværdi λ med $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ har samme algebraisk og geometrisk multiplicitet.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er asymptotisk stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Stabilitet for homogene systemer

- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes stabilt, hvis enhver løsning $x(t)$ er begrænset for $t \geq 0$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ kaldes asymptotisk stabilt, hvis det er stabilt, og hvis det for enhver løsning $x(t)$ gælder, at $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ og hvis enhver egenværdi λ med $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ har samme algebraisk og geometrisk multiplicitet.
- Systemet $\dot{x} = Ax$ er asymptotisk stabilt, hvis enhver egenværdi λ for A opfylder $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.
- Routh-Hurwitz' kriterium.

Stabilitet for inhomogene systemer

- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ siges at være asymptotisk stabilt, hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder $x_1(t) - x_2(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

Stabilitet for inhomogene systemer

- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ siges at være asymptotisk stabilt, hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder $x_1(t) - x_2(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt.

Stabilitet for inhomogene systemer

- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ siges at være asymptotisk stabilt, hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder $x_1(t) - x_2(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ kaldes BIBO-stabilt, hvis enhver løsning $x(t), t \in [t_0, \infty[$ hørende til et begrænset $u(t), t \in [t_0, \infty[$ er begrænset.

Stabilitet for inhomogene systemer

- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ siges at være asymptotisk stabilt, hvis det for ethvert u gælder, at vilkårlige to løsninger x_1 og x_2 opfylder $x_1(t) - x_2(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ kaldes BIBO-stabilt, hvis enhver løsning $x(t), t \in [t_0, \infty[$ hørende til et begrænset $u(t), t \in [t_0, \infty[$ er begrænset.
- Systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ er BIBO-stabilt, hvis og kun hvis det tilsvarende homogene system er asymptotisk stabilt.

Taylors sætning

- Det n'te Taylorpolynomium P_n for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$.

Taylors sætning

- Det n'te Taylorpolynomium P_n for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$.
- Taylors sætning: Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i et interval I indeholdende tallet x_0. Så findes der til ethvert givet $x \in I$ et tal ξ mellem x og x_0, så

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

Taylors sætning

- Det n'te Taylorpolynomium P_n for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$.
- Taylors sætning: Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i et interval I indeholdende tallet x_0. Så findes der til ethvert givet $x \in I$ et tal ξ mellem x og x_0, så

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

- Antag, at $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$$

Taylors sætning

- Det n'te Taylorpolynomium P_n for funktionen f med udviklingspunkt x_0 er givet ved $P_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)^k$.
- Taylors sætning: Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i et interval I indeholdende tallet x_0. Så findes der til ethvert givet $x \in I$ et tal ξ mellem x og x_0, så

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

- Antag, at $\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right| \leq C$ for alle $x \in I$. Så gælder for alle $x \in I$:

$$\left|f\left(x\right) - P_n\left(x\right)\right| \leq \frac{C}{(n+1)!} \left|x - a\right|^{n+1}$$

- Hvis konstanten C ovenfor kan vælges uafhængig af n (og f i øvrigt er vilkårligt ofte differentiabel), så gælder for ethvert $x \in I$, at

$$P_n\left(x\right) \to f\left(x\right) \text{ for } n \to \infty$$

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
- Rækken siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så $S_N \to S$ for $N \to \infty$. I så fald skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
- Rækken siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så $S_N \to S$ for $N \to \infty$. I så fald skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
- Kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ er konvergent netop når $|q| < 1$ og summen er $\frac{1}{1-q}$.

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
- Rækken siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så $S_N \to S$ for $N \to \infty$. I så fald skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
- Kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ er konvergent netop når $|q| < 1$ og summen er $\frac{1}{1-q}$.
- n'te-ledskriteriet: Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
- Rækken siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så $S_N \to S$ for $N \to \infty$. I så fald skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
- Kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ er konvergent netop når $|q| < 1$ og summen er $\frac{1}{1-q}$.
- n'te-ledskriteriet: Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.
- Sammenligningskriteriet: Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$. Så gælder: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Uendelige rækker I

- Ved en uendelig række forstås et udtryk af formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ved rækkens N'te afsnit S_N forstås summen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.
- Rækken siges at være konvergent, hvis der findes et tal S, så $S_N \to S$ for $N \to \infty$. I så fald skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
- Kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ er konvergent netop når $|q| < 1$ og summen er $\frac{1}{1-q}$.
- n'te-ledskriteriet: Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så gælder, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$.
- Sammenligningskriteriet: Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \geq n_0$. Så gælder: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent.

Uendelige rækker II

- Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med positive led kaldes ækvivalente, hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer og er positiv.

Uendelige rækker II

- Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med positive led kaldes ækvivalente, hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer og er positiv.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.

Uendelige rækker II

- Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med positive led kaldes ækvivalente, hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer og er positiv.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Uendelige rækker II

- Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med positive led kaldes ækvivalente, hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer og er positiv.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.

Uendelige rækker II

- Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med positive led kaldes ækvivalente, hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer og er positiv.
- Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ækvivalente, så er den ene konvergent, hvis den anden er.
- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent.
- Hvis en række er konvergent, men ikke absolut konvergent, siges den at være betinget konvergent. Eksempel. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder:

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q$ for $n \to \infty$ så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder de samme udsagn som ovenfor.

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q$ for $n \to \infty$ så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis $\sqrt[n]{|a_n|} \to q$ for $n \to \infty$ så gælder de samme udsagn som ovenfor.
- Lad f være kontinuert, aftagende, positiv og defineret på $[1, \infty[$. Så gælder: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ er konvergent.

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder de samme udsagn som ovenfor.
- Lad f være kontinuert, aftagende, positiv og defineret på $[1, \infty[$. Så gælder: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
- Korollar 4.21: For ethvert $q \leq N+1$ gælder

$$\sum_{n=q}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=q}^{\infty} f(n) < \sum_{n=q}^{N+1} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

Summen $\sum_{n=q}^{N} f(n)$ skal forstås som nul når $q = N+1$.

Uendelige rækker III

- Kvotientkriteriet. Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder:
- Hvis $q < 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- Hvis $q > 1$, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- Rodkriteriet. Hvis $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow q$ for $n \longrightarrow \infty$ så gælder de samme udsagn som ovenfor.
- Lad f være kontinuert, aftagende, positiv og defineret på $[1, \infty[$. Så gælder: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, hvis og kun hvis $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
- Korollar 4.21: For ethvert $q \leq N+1$ gælder

$$\sum_{n=q}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=q}^{\infty} f(n) < \sum_{n=q}^{N+1} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

  Summen $\sum_{n=q}^{N} f(n)$ skal forstås som nul når $q = N+1$.
- Leibniz' kriterium: Antag at $b_n \downarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$. Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.

Potensrækker

- Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kaldes en potensrække.

Potensrækker

- Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kaldes en potensrække.
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.

Potensrækker

- Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$kaldes en potensrække.
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Lad f for $|x| < \rho$ være defineret ved $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Så er f differentiabel og $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$. Konvergensradius for denne er også ρ.

Potensrækker

- Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$kaldes en potensrække.
- For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ findes et tal (eller evt. ∞) ρ, så rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$ og divergent for $|x| > \rho$.
- Lad f for $|x| < \rho$ være defineret ved $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Så er f differentiabel og $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$. Konvergensradius for denne er også ρ.
- f er dermed vilkårligt ofte differentiabel og dens Taylorrække er den givne række.

Uniform konvergens I

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet I, hvis der findes en funktion f, så der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et N_0, så $|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.

Uniform konvergens I

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet I, hvis der findes en funktion f, så der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et N_0, så $|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.

Uniform konvergens I

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet I, hvis der findes en funktion f, så der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et N_0, så $|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet I, hvis $|f_n(x)| \leq k_n$ for alle $x \in I$ og alle $n \geq 1$.

Uniform konvergens I

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet I, hvis der findes en funktion f, så der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et N_0, så $|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet I, hvis $|f_n(x)| \leq k_n$ for alle $x \in I$ og alle $n \geq 1$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet I, så er den uniformt konvergent på I.

Uniform konvergens I

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet I, hvis der findes en funktion f, så der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et N_0, så $|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in I$ og alle $N \geq N_0$.
- En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er uniformt konvergent på ethvert lukket og begrænset delinterval af $]-\rho, \rho[$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ kaldes en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ på intervallet I, hvis $|f_n(x)| \leq k_n$ for alle $x \in I$ og alle $n \geq 1$.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække på intervallet I, så er den uniformt konvergent på I.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på intervallet I, så er sumfunktionen kontinuert på I.

Uniform konvergens II

- Lad f_n være kontinuert på intervallet $I = [a, b]$ for alle n. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på I, så gælder, at

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Uniform konvergens II

- Lad f_n være kontinuert på intervallet $I = [a, b]$ for alle n. Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent på I, så gælder, at

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

- Lad f_n være differentiabel på intervallet $I = [a, b]$ for alle n. Antag, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ er uniformt konvergent på I, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent for et eller andet $x \in I$. så gælder, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er uniformt konvergent og at summen er differentiabel med

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
- Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ og } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
- Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ og } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

- Lad f være periodisk og antag f er stykkevist differentiabel. Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
- Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ og } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

- Lad f være periodisk og antag f er stykkevist differentiabel. Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$ ellers er summen $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \downarrow a} f(x) + \lim_{x \uparrow a} f(x)\right)$.

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
- Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ og } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

- Lad f være periodisk og antag f er stykkevist differentiabel. Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$ ellers er summen $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \downarrow a} f(x) + \lim_{x \uparrow a} f(x)\right)$.
- Fourierrækken er uniformt konvergent på ethvert lukket kontinuitetsinterval.

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
- Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ og } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

- Lad f være periodisk og antag f er stykkevist differentiabel. Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$ ellers er summen $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \downarrow a} f(x) + \lim_{x \uparrow a} f(x)\right)$.
- Fourierrækken er uniformt konvergent på ethvert lukket kontinuitetsinterval.
- Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ er konvergent. Så er den rækken $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ uniformt konvergent på R og den er Fourierrækken for sin sum $f(x)$. f er kontinuert.

Fourierrækker I

- Lad f være integrabel på $[-\pi, \pi]$. Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
- Fourierkoefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ og } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

- Lad f være periodisk og antag f er stykkevist differentiabel. Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $x \in R$.
- Hvis f er kontinuert i x, så er Fourierrækkens sum $f(x)$ ellers er summen $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \downarrow a} f(x) + \lim_{x \uparrow a} f(x)\right)$.
- Fourierrækken er uniformt konvergent på ethvert lukket kontinuitetsinterval.
- Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ er konvergent. Så er den rækken $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ uniformt konvergent på R og den er Fourierrækken for sin sum $f(x)$. f er kontinuert.
- Der gælder, at $|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$.

Fourierrækker II

- Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Den kan også skrives på kompleks form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

Fourierrækker II

- Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Den kan også skrives på kompleks form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.
- Med $b_0 = 0$ er oversættelsen

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) & \text{for} \quad n \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

Fourierrækker II

- Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Den kan også skrives på kompleks form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.
- Med $b_0 = 0$ er oversættelsen

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{for} \quad n \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

- Rækken er konvergent, hvis $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ eksisterer.

Fourierrækker II

- Fourierrækken for f er $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Den kan også skrives på kompleks form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.
- Med $b_0 = 0$ er oversættelsen

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) & \text{for} \quad n \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) & \text{for} \quad n < 0 \end{cases}$$

- Rækken er konvergent, hvis $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$eksisterer.
- $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx.$

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.
- Dan gennemsnittene $t_N = \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N)$.

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.
- Dan gennemsnittene $t_N = \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N)$.
- Hvis talfølgen $(t_N)_{N=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdien t, så siges rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at være Cesaro-summabel (C1) med sum t.

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.
- Dan gennemsnittene $t_N = \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N)$.
- Hvis talfølgen $(t_N)_{N=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdien t, så siges rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at være Cesaro-summabel (C1) med sum t.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.

Cesaro-summabilitet. Definition

- Lad afsnittene for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ for $N \geq 1$.
- Dan gennemsnittene $t_N = \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N)$.
- Hvis talfølgen $(t_N)_{N=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdien t, så siges rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at være Cesaro-summabel (C1) med sum t.
- Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum s, så er rækken Cesaro-summabel med sum s.
- Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel, så gælder $\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0$ og $\frac{s_n}{n} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^n$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^n$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Definition af Hilbertrum.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^{n}$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle \, e_k$.
- Definition af Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^n$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Definition af Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^\infty$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.
- Hvis H har en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^\infty$, så kan enhver vektor $f \in H$ skrives $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, e_k \rangle e_k$.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle\cdot,\cdot\rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^n$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k\rangle\, e_k$.
- Definition af Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^\infty$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.
- Hvis H har en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^\infty$, så kan enhver vektor $f \in H$ skrives $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, e_k\rangle\, e_k$.
- Parsevals sætning $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k\rangle|^2$.

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle\cdot,\cdot\rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^n$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k\rangle\, e_k$.
- Definition af Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^\infty$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.
- Hvis H har en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^\infty$, så kan enhver vektor $f \in H$ skrives $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, e_k\rangle\, e_k$.
- Parsevals sætning $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k\rangle|^2$.
- I vektorrummet $H = L^2(-\pi, \pi)$ defineres et indre produkt ved

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

Indre produkt og norm i vektorrum

- Indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i et (komplekst) vektorrum. Normen svarende til $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er givet ved $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Lad $(e_k)_{k=1}^{n}$ være en ortonormal basis for V. Så gælder: Enhver vektor $f \in V$ kan skrives $f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Definition af Hilbertrum.
- En ortonormalbasis i et uendelig-dimensionalt Hilbertrum H er en følge $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ af indbyrdes ortogonale vektorer af længde 1.
- Hvis H har en ortonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, så kan enhver vektor $f \in H$ skrives $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Parsevals sætning $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$.
- I vektorrummet $H = L^2(-\pi, \pi)$ defineres et indre produkt ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

- Hermed er $L^2(-\pi, \pi)$ et Hilbertrum.

Det trigonometriske ortonormalsystem

- En ortonormalbasis i $L^2(-\pi, \pi)$ er givet ved:

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2\cdot), \ldots$$

Det trigonometriske ortonormalsystem

- En ortonormalbasis i $L^2(-\pi,\pi)$ er givet ved:

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2\cdot), \ldots$$

- Fourierrækken for f er konvergent med sum f:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot) + b_n \sin(n\cdot)$$

Det trigonometriske ortonormalsystem

- En ortonormalbasis i $L^2(-\pi, \pi)$ er givet ved:

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2\cdot), \ldots$$

- Fourierrækken for f er konvergent med sum f:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot) + b_n \sin(n\cdot)$$

- Dette betyder: $\|f - s_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 \, dx \to 0$ for $N \to \infty$.

Det trigonometriske ortonormalsystem

- En ortonormalbasis i $L^2(-\pi, \pi)$ er givet ved:

$$(e_k)_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2\cdot), \ldots$$

- Fourierrækken for f er konvergent med sum f:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot) + b_n \sin(n\cdot)$$

- Dette betyder: $\|f - s_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 \, dx \to 0$ for $N \to \infty$.
- Parsevals sætning:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

Eksponentialmatricen

- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Eksponentialmatricen

- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$
- Rækken er konvergent for enhver kvadratisk matrix A.

Eksponentialmatricen

- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$
- Rækken er konvergent for enhver kvadratisk matrix A.
- Lad A være en diagonaliserbar matrix. Så eksisterer der en invertibel matrix P og en diagonalmatrix Λ så $A = P\Lambda P^{-1}$. Og så har vi $e^A = Pe^{\Lambda}P^{-1}$.

Eksponentialmatricen

- Lad A være en kvadratisk matrix. Eksponentialmatricen e^A defineres som
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$
- Rækken er konvergent for enhver kvadratisk matrix A.
- Lad A være en diagonaliserbar matrix. Så eksisterer der en invertibel matrix P og en diagonalmatrix Λ så $A = P\Lambda P^{-1}$. Og så har vi $e^A = Pe^{\Lambda}P^{-1}$.
- Lad A være en kvadratisk matrix. Så har vi $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.
- Differentialligningen har da to lineært uafhængige analytiske løsninger i a. Disse findes ved indsættelse af $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n$.

Potensrækkeløsning om ordinært punkt

- En funktion f kaldes analytisk i et punkt a, hvis den er summen af en potensrække i en cirkelskive med centrum i a.
- Betragt differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og q er analytiske i punktet a siges a at være et ordinært punkt for differentialligningen.
- Differentialligningen har da to lineært uafhængige analytiske løsninger i a. Disse findes ved indsættelse af $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n$.
- Rekursionsformel.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p\,(t)\,y' + q\,(t)\,y = 0$.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\,p(t)$ og $(t-a)^2\,q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\, p(t)$ og $(t-a)^2\, q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.
- Differentialligningen har mindst én rækkeløsninge af formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^{n+r}$.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\, p(t)$ og $(t-a)^2\, q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.
- Differentialligningen har mindst én rækkeløsninge af formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^{n+r}$.
- Indeksligningen.

Potensrækkeløsning om regulært singulært punkt

- Betragt igen differentialligningen $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$.
- Hvis p og/eller q ikke er analytiske i punktet a siges a at være et singulært punkt for differentialligningen.
- Hvis dog $(t-a)\, p(t)$ og $(t-a)^2\, q(t)$ begge er analytiske i a, så siges a at være et regulært singulært punkt.
- Differentialligningen har mindst én rækkeløsninge af formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^{n+r}$.
- Indeksligningen.
- Rekursionsformel.

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- $H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$ og $y(t) = H(s) e^{st}$.

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- $H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$ og $y(t) = H(s) e^{st}$.
- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$.

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- $H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$ og $y(t) = H(s) e^{st}$.
- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$.
- Svaret på u er da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$.

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- $H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$ og $y(t) = H(s) e^{st}$.
- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$.
- Svaret på u er da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$.
- Med $u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ fås

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(n)\, a_n \cos(nt + \phi(n)) + \mathcal{A}(n)\, b_n \sin(nt + \phi(n))
\end{aligned}
$$

Fourierrækkemetoden for systemer

- Vi betragter systemer af formen $\dot{x} = Ax + bu$ med $y = c^T x$, hvor det antages, at egenværdierne for A har negativ realdel.
- $x = x(t)$ er tilstandsvektoren, dens koordinater er tilstandsvariable. $u = u(t)$ er den ydre påvirkning på systemet. $y = y(t)$ er svaret.
- $H(s) = -c^T (A - sI)^{-1} b$ og $y(t) = H(s) e^{st}$.
- Antag, at u er 2π-periodisk, kontinuert og stykkevist differentiabel: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$.
- Svaret på u er da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$.
- Med $u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ fås

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{a_0}{2}\mathcal{A}(0) + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(n)\, a_n \cos(nt + \phi(n)) + \mathcal{A}(n)\, b_n \sin(nt + \phi(n))
\end{aligned}
$$

- hvor $\mathcal{A}$ og ϕ er amplitudekarakteristikken og fasekarakteristikken henholdsvis.

Approksimation i effekt

- Effekten defineres ved $P(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$.

Approksimation i effekt

- Effekten defineres ved $P(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$.
- Parseval giver: $P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n^2| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$.

Approksimation i effekt

- Effekten defineres ved $P(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$.
- Parseval giver: $P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$.
- $P(S_N) = \sum_{n=-N}^{N} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$.

Approksimation i effekt

- Effekten defineres ved $P(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$.
- Parseval giver: $P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$.
- $P(S_N) = \sum_{n=-N}^{N} \left|c_n^2\right| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$.
- Ønskes N bestemt, så $P(S_N) \geq \delta P(f)$ skal vi vælge N, så

$$\sum_{|n|\geq N+1} \left|c_n^2\right| = \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \leq (1-\delta)\,P(f)$$