Ugeseddel 9
Signaler og Lineære Systemer 01037

Institut for Matematik

6. november 2006

1 Forelæsningen mandag den 6. november kl. 13 - 15

I lærebogen (Ole Christensen, Differentialligninger og uendelige rækker, Institut for Matematik 2006) gennemgås siderne 128-132 (afsnit 6.3) om Fourierrækker på kompleks form. Desuden introduceres begrebet Cesaro-summabilitet af rækker (se nedenfor).
Forelæsningen mandag den 13. november vil omfatte afsnit 6.4-6.5.
Kursushjemmesiden har adressen

http://www2.mat.dtu.dk/education/01037/

hvor al information bringes, bl.a.

- Mapleløsninger til øvelserne (uge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 og 8 er anbragt).
- Mapleløsninger til hjemmeopgaverne (løsninger til 1. , 2., 3., 4., 5. og 6. sæt er anbragt).
- Maplepakken SigLinSys, der bl.a. bruges under forelæsningerne. Den revideres løbende. Sidste revisionsdato kan læses på hjemmesiden. Pakken findes under menupunktet Noter. Et forklarende worksheet findes også der.
- Beamer-præsentationer brugt ved forelæsningerne. Findes under menupunktet Noter.
- Maple-worksheets brugt ved forelæsningerne. Findes under menupunktet Noter.

2 Øvelserne kl. 15-17

Hent den nyeste version af SigLinSys-pakken. Kontrollér gerne ved brug af *FourierRække* fra SigLinSys-pakken.

1. Hvor mange gange differentiabel er funktionen f givet i opgave 217?
2. Opgave 202. Hop dog over (vii).
3. Opgave 211. Kun (ii) denne gang.
4. Opgave 214. Hop over (iv) og (vii).
5. Opgave Cesaro 1. Undersøg, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, n$ er Cesaro-summabel.

3 Hjemmeopgaver til aflevering mandag den 13. november

1. Opgave 222.
2. Opgave Cesaro 2. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ er Cesaro-summabel for alle $x \in R$. Vink: Find først en formel for $s_N = \sum_{n=1}^{N} \sin nx$. Derefter en formel for $t_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} s_N$. Hertil kan Maple-proceduren *sum* evt. bruges.

4 Cesaro-summabilitet (C1)

Definition 1 *Lad afsnittene for rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være* $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$, *hvor derfor* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *for* $N \geq 0$. *Dan gennemsnittene*

$$t_1 = s_1,\ t_2 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2),\ t_3 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3),\ \ldots,\ t_N = \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N),\ \ldots$$

Hvis talfølgen $(t_N)_{N=1}^{\infty}$ *er konvergent med grænseværdien* t, *altså hvis* $\lim_{N\to\infty} t_N = t$, *så siges rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *at være Cesaro-summabel (C1) med sum* t.

Sætning 2 *Hvis rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent med sum* s, *så er rækken Cesaro-summabel med sum* s.

Bemærkning 3 *Det omvendte gælder ikke.* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ *er Cesaro-summabel med sum* $\frac{1}{2}$, *men rækken er divergent.*

Sætning 4 *Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.*

Sætning 5 *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er Cesaro-summabel, så gælder*

$$\frac{a_n}{n} \to 0 \ \text{og}\ \frac{s_n}{n} \to 0 \ \text{for}\ n \to \infty$$

Sætning 6 *(*Littlewood's sætning*) Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er Cesaro-summabel og hvis talfølgen* $(na_n)_{n=1}^{\infty}$ *er begrænset, så er* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

Sætning 7 *(*Fejér's sætning*) Hvis funktionen* f *er periodisk med periode* 2π *og kontinuert, så er dens Fourierrække*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

uniformt Cesaro-summabel med sum $f(x)$ *for* $x \in R$.

Bemærkning 8 *En periodisk og kontinuert funktion* f *kan have en Fourierrække, der er divergent i visse punkter, men Fourierrækken er altså Cesaro-summabel for alle* $x \in R$*!*