Ugeseddel 11
Signaler og Lineære Systemer 01037

Institut for Matematik

20. november 2006

1 Forelæsningen mandag den 20. november kl. 13 - 15

I lærebogen (Ole Christensen, Differentialligninger og uendelige rækker, Institut for Matematik 2006) gennemgås siderne 153-163 (afsnit 7.1-7.2) om eksponentialmatricen og potensrækkemetoden.
Forelæsningen mandag den 27. november vil omfatte afsnit 7.3-7.4.
Kursushjemmesiden har adressen

http://www2.mat.dtu.dk/education/01037/

hvor al information bringes, bl.a.

- Mapleløsninger til øvelserne (uge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 og 10 er anbragt).
- Mapleløsninger til hjemmeopgaverne (løsninger til 1., 2., 3., 4., 5. ,6., 7. og 8. sæt er anbragt).
- Maplepakken SigLinSys, der bl.a. bruges under forelæsningerne. Den revideres løbende. Sidste revisionsdato kan læses på hjemmesiden. Pakken findes under menupunktet Noter. Et forklarende worksheet findes også der.
- Beamer-præsentationer brugt ved forelæsningerne. Findes under menupunktet Noter.
- Maple-worksheets brugt ved forelæsningerne. Findes under menupunktet Noter.

2 Øvelserne kl. 15-17

1. Opgave *Eksponentialmatrix 1.*

   (a) Lad A være matricen
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Find e^{At} ved brug af definitionen
   $$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

(b) Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Find e^{At} ved brug af definitionen.

2. Opgave *Eksponentialmatrix 2*. Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -10 \\ -3 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Find e^{At} ved at bruge, at A har egenværdierne 0 og -1 (algebraisk multiplicitet 2) med tilhørende egenrum udspændt af

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

henholdsvis.

3. Opgave *Rækkeløsning 1*. Find den rækkeløsning $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ til differentialligningen

$$y'' + ty' + y = 0$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

4. Opgave *Rækkeløsning 2*. Der er givet differentialligningen

$$t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

Differentialligningen har løsninger af formen

$$y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

hvor også r skal bestemmes.

(a) Ligningen til bestemmelse af r kaldes indeksligningen (jvf. forelæsningen). Find denne.

(b) Find de løsninger til differentialligningen, der svarer til den største af r-værdierne.

3 Hjemmeopgaver til aflevering mandag den 27. november

1. Opgave *Rækkeløsning 3*. Find den rækkeløsning $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ til differentialligningen

$$y'' + t^2 y' + 2ty = 0$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

2. Opgave *Eksponentialmatrix 3*. Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Find e^{At} ved brug af definitionen

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

Vink: Udnyt, at $A = 2I + N$, hvor I er enhedsmatricen og

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Brug desuden binomialformlen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

med $a = 2I$ og $b = N$.