Komplekse tal

Preben Alsholm

7. februar 2008

1 Talmængder og regneregler for tal

1.1 Talmængder

Talmængder

- N er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Z er mængden af *hele tal* $\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.
- Q er mængden af *rationale tal*, dvs. brøker og hele tal.
- R er mængden af *reelle tal*. Identificeres med mængden af punkter på en tallinie. De reelle tal, der ikke er rationale, kaldes *irrationale*.
- C er mængden af *komplekse tal*. Identificeres med mængden af punkter i planen. De komplekse tal, der ikke er reelle, kaldes *imaginære*.
- Vi har $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

1.2 Ligninger

Ligninger

- Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor N.
- men har indenfor Z.
- Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor Z.
- men har indenfor Q.
- Ligningen $x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning indenfor Q.
- men har indenfor R.
- Ligningen $x^2 + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor R.
- men har indenfor C.

1.3 Regneregler

Regneregler

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)\,c = a\,(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a\,(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$
7. $1a = a$
8. $a + x = 0$ har præcis én løsning for x
9. $ax = 1$ har præcis én løsning for x, når $a \neq 0$

2 Beskrivelse af de komplekse tal I

Beskrivelse af de komplekse tal I

- Lad i være blot symbolet, bogstavet i.
- C er mængden af udtryk $a_1 + a_2 i$, hvor $a_1, a_2 \in R$.
- *Definition af addition.* $(a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\, i$
- *Definition af multiplikation.* $(a_1 + a_2 i)\,(b_1 + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$
- Vi skriver $a_1 + 0i = a_1$ og $0 + a_2 i = a_2 i$. Desuden erstattes $1i$ af blot i.
- De komplekse tal af formen $a_1 + 0i$ er nu blot de reelle tal.

2.1 Beskrivelse af de komplekse tal II

Beskrivelse af de komplekse tal II

- Der gælder nu $i^2 = (-1)$.
- Bevis. $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)\,(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\, i = -1 + 0i = -1$.
- Åbenbart kan mængden af udtryk af formen $a_1 + a_2 i$ identificeres med mængden af talpar (a_1, a_2).
- De komplekse tal kan derfor også identificeres med punkterne i planen.

2.2 Regnereglerne

Regnereglerne

De tidligere viste regneregler gælder også indenfor de komplekse tal:

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)\, c = a\,(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a\,(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$
7. $1a = a$
8. $a + z = 0$ har præcis én løsning for z
9. $az = 1$ har præcis én løsning for z, når $a \neq 0$

2.3 Kompleks konjugation, Division

Kompleks konjugation, Division

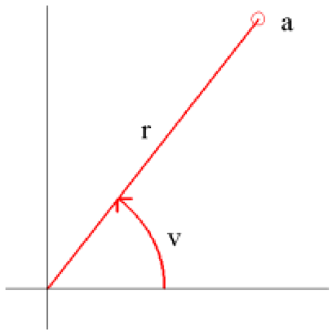
- *Kompleks konjugeret*: $\overline{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$
- Sætning $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ og $\overline{(ab)} = \overline{a}\,\overline{b}$
- Med a^{-1} menes løsningen til ligningen $az = 1$
- a^{-1} skrives også $\frac{1}{a}$
- Med $\frac{b}{a}$ menes ba^{-1}. Dette tal er løsningen til ligningen $az = b$
- En metode til konkret udregning:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-4+7i} &= \frac{(2+3i)\,\overline{(-4+7i)}}{(-4+7i)\,\overline{(-4+7i)}} = \frac{(2+3i)\,(-4-7i)}{(-4+7i)\,(-4-7i)} \\ &= \frac{13-26i}{(-4)^2-(7i)^2} = \frac{13-26i}{16+49} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

2.4 Realdel, imaginærdel osv.

Realdel, imaginærdel osv.

- *Realdel*: $\mathrm{Re}\,(a_1 + ia_2) = a_1$. *Imaginærdel*: $\mathrm{Im}\,(a_1 + ia_2) = a_2$
- *Modulus*: $|a| = |a_1 + ia_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Også kaldet absolutværdi og numerisk værdi.
- $a\overline{a} = |a|^2$ blev brugt i den konkrete division tidligere.



- $|ab| = |a|\,|b|$
- $|a^n| = |a|^n$
- Trekantsuligheden: $|a + b| \leq |a| + |b|$

2.5 Polære koordinater I

Polære koordinater I

- Modulus: $r = |a| = |a_1 + ia_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ er den ene polære koordinat for a.
- *Argument*: Enhver af vinklerne fra den reelle akses positive del til linien fra 0 til a kaldes et argument for a, betegnelse: $\arg(a)$. Dette regnes med fortegn.
- Ethvert komplekst tal kan skrives på polær form: $a = r \cdot (\cos v + i \sin v)$, hvor r er modulus og v er et argument for a.

2.6 Polære koordinater II

Polære koordinater II

- Hovedargumentet for et komplekst tal er det argument, der ligger i $]-\pi, \pi]$.
- $\arg(ab) = \arg a + \arg b$ (Bevis i noterne på hjemmesiden).
- $\arg(a^n) = n \arg a$
- $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$
- Udsagnene ovenfor om argumentet skal forstås rigtigt: Eksempelvis menes med $\arg(ab) = \arg a + \arg b$ at et af argumenterne for ab fås ved at lægge et argument for a sammen med et argument for b.
- Med $a = r(\cos v + i \sin v)$ og $b = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ fås af det ovenstående $ab = r\rho(\cos(v + \theta) + i \sin(v + \theta))$.
- Specielt gælder *Moivres formel*: $(\cos v + i \sin v)^n = \cos nv + i \sin nv$