Den komplekse eksponentialfunktion

Preben Alsholm

11. februar 2008

1 Den komplekse eksponentialfunktion

1.1 Definitionen

Definitionen

- Den velkendte eksponentialfunktion

$$x \to e^x$$

vil vi ofte ligesom i Maple give navnet exp. Vi har altså

$$\exp(x) = e^x$$

for alle $x \in R$.

- Denne funktion har den fundamentale egenskab

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

eller anderledes skrevet $e^{x+y} = e^x e^y$ for alle $x, y \in R$.

- Vi *definerer* nu

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

eller anderledes skrevet

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

gældende for alle $x, y \in R$.

1.2 Egenskaber for exp

Egenskaber for exp

- Tallet e^{x+iy} har åbenbart modulus e^x og argument y:

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \quad \arg\left(e^{x+iy}\right) = y$$

når $x, y \in R$.

- For alle $z_1, z_2 \in C$ gælder

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

eller anderledes skrevet $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

- Bevis: Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, så har vi:

$$\begin{aligned}
\left|e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right| &= \left|e^{z_1}\right| \cdot \left|e^{z_2}\right| = \left|e^{x_1+iy_1}\right| \cdot \left|e^{x_2+iy_2}\right| = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\
&= e^{x_1+x_2} = \left|e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right| = \left|e^{z_1+z_2}\right| \\
\arg\left(e^{z_1} \cdot e^{z_2}\right) &= \arg\left(e^{z_1}\right) + \arg\left(e^{z_2}\right) = \arg\left(e^{x_1+iy_1}\right) + \arg\left(e^{x_2+iy_2}\right) \\
&= y_1 + y_2 = \arg\left(e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right) = \arg\left(e^{z_1+z_2}\right)
\end{aligned}$$

Tallene $e^{z_1+z_2}$ og $e^{z_1}e^{z_2}$ har altså samme modulus og samme argument. De er derfor ens.

1.3 Polær form

Polær form

- Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev sidste gang skrevet

$$a = r(\cos v + i \sin v)$$

Den vil i fremtiden blive skrevet således:

$$a = r\exp(iv) = re^{iv}$$

- Eksempel. Vi finder den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$. Modulus er $\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. Tegn! Så

$$-\sqrt{3} - i = 2\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

- Maple-worksheet til og med Eksempel 25.

1.4 Moivres formel

Moivres formel

- For $n \in N$ og $x \in R$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- Bevis: $(\cos x + i \sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$

- Eksempel.

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \operatorname{Re}(\cos 3x + i\sin 3x) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x\right) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

- Ved ovenfor at erstatte Re med Im fås formlen

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\
&= 3\left(1 - \sin^2 x\right)\sin x - \sin^3 x \\
&= -4\sin^3 x + 3\sin x
\end{aligned}$$

- Maple-worksheet Eksempel 27

1.5 Den binome ligning

Den binome ligning

- En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a \tag{1}$$

  hvor $n \in N$ og $a \in C$. Ubekendt: z.

- Vil finde "samtlige komplekse n'te rødder af a". En kompleks n'te rod af a er et tal som opløftet til n'te giver a.

- Formel. Rødderne i den binome ligning (1), hvor $a = re^{iv}$, $r \geq 0$, $v \in R$, er givet ved

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

- Bevis: Sæt $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in R$. Ved indsættelse i (1) fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{iv} \text{ og hermed } \rho^n e^{in\theta} = re^{iv}$$

  De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p2\pi$, hvor $p \in Z$. Heraf følger formlen.

1.6 Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler I

- Ligningen $z^5 = 32$. Vi bruger formlen. Da $32 = 32e^{i0}$ fås

$$z = \sqrt[5]{32}\exp\left(i\left(\frac{0}{5} + p\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2\exp\left(ip\frac{2\pi}{5}\right)$$

  hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Rødderne er på polær form. Den rektangulære er ikke så køn.

- Rødderne ligger jævnt fordelt på en cirkel med radius 2.
- Se Maple-illustration.
- Ligningen $z^4 = 1 + i$. Da $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ fås

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\exp\left(i\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{4} + p\frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[8]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{16} + p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

  hvor $0, 1, 2, 3$. Rødderne er jævnt fordelt på en cirkel med radius $\sqrt[8]{2}$.
- Se Maple-illustration.

1.7 Den binome ligning, eksempler II

Den binome ligning, eksempler II

- Ligningen $z^3 = -125$. Vi bruger formlen. Da $-125 = 125e^{i\pi}$ fås

$$z = \sqrt[3]{125}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5\exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

  hvor $p = 0, 1, 2$. Hermed har vi rødderne på polær form.
- Den rektangulære er for $p = 1$ simpelthen $z_1 = 5e^{i\pi} = -5$.
- For $p = 0$ fås $z_0 = 5\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{3}$.
- For $p = 2$ fås $z_2 = 5\exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5\exp\left(i\frac{5\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\sqrt{3}$.
- Se Maple-illustration.