Rødder i polynomier og Eulers formler

Preben Alsholm

14. februar 2008

1 Rødder i polynomier

1.1 Andengradsligningen I

Andengradsligning I

- Vi løser
$$az^2 + bz + c = 0$$
hvor $a, b, c \in C$, og $a \neq 0$.
- Vi har:
$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$
- Andengradsligningen kan altså omskrives til
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
- Sæt $w = z + \frac{b}{2a}$, så har vi den binome ligning
$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

1.2 Andengradsligningen II

Andengradsligning II

- Sæt $w = z + \frac{b}{2a}$, så har vi den binome ligning
$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
- Denne har 2 (komplekse) rødder, som vi skriver som
$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

- Så rødderne i andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ er

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Eksempel. Løs ligningen $z^2 + z + 1 = 0$. Vi finder

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1.3 Andengradsligningen III

Andengradsligning III

- Eksempel. Løs ligningen $z^2 - 2z + (1 + i) = 0$. Vi finder

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+i)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4i}}{2}$$

- Vi skal så løse den binome ligning $w^2 = -4i$, dvs. finde $\pm\sqrt{-4i}$. Da

$$-4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

fås

$$w = \sqrt{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + p\pi\right)}, \quad p = 0, 1$$

- Altså

$$w = \pm 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \pm 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pm\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$

- Løsningerne til andengradsligningen er dermed

$$z = \frac{2 \pm \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1.4 Polynomier generelt

Polynomier generelt

- Et polynomium i den variable z er et udtryk af formen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

- **Algebraens Fundamentalsætning**. Ethvert polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod indenfor de komplekse tal.
- Generelle løsningsformler findes for $n \leq 4$, men det kan bevises, at der ikke kan konstrueres generelle løsningsformler for $n \geq 5$.
- Husk dog, at et polynomium af vilkårlig høj grad men med kun to led kan løses ved en formel, der umiddelbart giver den polære form for løsningerne.
- Se Maple om 3. og 4. gradsligninger.

1.5 Faktorisering af polynomier I

Faktorisering af polynomier I

- En rod z_1 i polynomiet p har multipliciteten k, hvis $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$, hvor $q(z)$ er et polynomium, og hvor z_1 ikke er rod i $q(z)$.
- Hvis multipliciteten er 1, siges roden at være simpel.
- Eksempel. $5z^4 - 50z^3 + 120z^2 + 160z - 640 = 5(z-4)^3(z+2)$. Så 4 er rod af multiplicitet 3, og -2 er rod af multiplicitet 1. -2 er altså en simpel rod.
- Polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, hvor $n \geq 1$ (og $a_n \neq 0$) kan skrives som et produkt af a_n og n førstegradsfaktorer:

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

- Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ har altså n rødder, hvis disse regnes med multiplicitet.

1.6 Faktorisering af polynomier II

Faktorisering af polynomier II

- Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in C$ er rod, så er også $\overline{z_1}$ rod.
- Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ og med reelle koefficienter kan skrives som et produkt af reelle første- og andengradsfaktorer.
- Eksempel. Hvis $2 + 3i$ er rod, så er $2 - 3i$ også.
- Så begge faktorerne $(z - (2+3i))$ og $(z - (2-3i))$ forekommer i en faktorisering af polynomiet.
- Vi betragter produktet af disse to faktorer:

$$(z - (2+3i))(z - (2-3i))$$

- Sætter andre parenteser:

$$= ((z-2) - 3i)((z-2) + 3i)$$

- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ bruges:

$$= (z-2)^2 + 3^2 = z^2 - 4z + 13$$

1.7 Polynomiers division

Polynomiers division

- Division af $p = x^5 - 6x^3 + 6x^2 + 5x + 12$ med $q = x^2 + 2x + 3$ kan gøres således:
- Højestegradsleddet i p er x^5. Dividér det med højestegradsleddet i q, som er x^2. Resultat $d_1 = \frac{x^5}{x^2} = x^3$:
- Gang resultatet d_1 på q. Resultat $x^5 + 2x^4 + 3x^3$. Træk dette fra p:
- Herved opnås et nyt polynomium p_1 med mindre grad $p_1 = -2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 5x + 12$ og $p = p_1 + qd_1$
- Gentag proceduren, hvorved opnås et polynomium p_2 hvis grad er mindre end p_1's og vi har $p_1 = p_2 + qd_2$.
- Fortsæt indtil graden af p_k er mindre end graden af q.
- Vi har så

$$\begin{aligned} p &= p_1 + qd_1 = p_2 + qd_2 + qd_1 \\ &= p_k + qd_k + qd_{k-1} + \ldots + qd_2 + qd_1 \\ &= p_k + q\left(d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 + d_1\right) \end{aligned}$$

- Gennemfør med kridt og Maple.

2 Eulers formler

Eulers formler I

- Ifølge definitionen af den komplekse eksponentialfunktion har vi

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos v + i \sin v \\ e^{-iv} &= \cos v - i \sin v \end{aligned}$$

- Ved addition af disse formler og efter division med 2 fås

$$\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$$

- Tilsvarende fås ved subtraktion og division med $2i$

$$\sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$$

2.1 Eulers formler II

Eulers formler II

- Vi ønsker $\sin^4 x$ udtrykt ved $\sin x, \sin 2x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \ldots$.
- Vi udnytter den ene af Eulers formler

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- og vi finder dermed

$$\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4$$

- Binomialformlen $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ benyttes:

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

- $$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right)$$

- $$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

2.2 Eulers formler III

Eulers formler III

- Så

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

- Ved hjælp af denne formel beregnes integralet

$$\int_0^\pi \sin^4 x dx$$

- som følger

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^4 x dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$