Lineære ligningssystemer og Gauss-elimination

Preben Alsholm

18. februar 2008

1 Lineære ligningssystemer og Gauss-elimination

1.1 Et eksempel

Et eksempel

100g mælk	Komælk	Fåremælk	Gedemælk
Protein	3.2g	6.2g	3.8g
Kulhydrat	4.9g	5.0g	4.4g
Fedt	3.5g	8.9g	4.1g

  Kan man opnå en blanding, der pr. 100g indeholder 4g protein, 4.5g kulhydrat og 5g fedt?
  Brøkdele: Komælk x, Fåremælk y, Gedemælk z. Postevand w.
- Proteinmængden: $3.2 \cdot x + 6.2 \cdot y + 3.8 \cdot z = 4$
- Kulhydratmængden: $4.9 \cdot x + 5.0 \cdot y + 4.4 \cdot z = 4.5$
- Fedtmængden: $3.5 \cdot x + 8.9 \cdot y + 4.1 \cdot z = 5$
- Summen skal være 1: $x + y + z + w = 1$
- Udregning i Maple.

1.2 Et generelt lineært ligningssystem

Et generelt lineært ligningssystem

- Et lineært ligningssystem:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Koefficienterne er tallene $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$. De ubekendte er $x_1, x_2, \ldots, x_n$. På højresiden befinder sig tallene $b_1, b_2 \ldots, b_m$.

- En løsning er et sæt af n tal, der indsat i stedet for $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ligningerne gør disse til sande udsagn af typen $5 = 5, 7 = 7, -311 = -311$ eller $0 = 0$.

1.3 Koefficientmatrix, Totalmatrix

Koefficientmatrix, Totalmatrix

- Koefficientmatricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Totalmatricen (Lay: *the augmented matrix*)

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- A er en $m \times n$-matrix, fordi A har m rækker og n søjler.
  T er en $m \times (n+1)$-matrix, fordi T har m rækker og $n+1$ søjler.

- Maple: Et tilfældigt valgt lineært ligningssystem.

1.4 Tilladelige operationer

Tilladelige operationer

- Tilladte operationer på ligningerne:

  1. Ombytning to ligninger.
  2. Multiplikation af en ligning med et tal forskellig fra nul.
  3. Erstatning af ligning nr. i med summen af ligning i og et tal gange ligning j, når $i \neq j$.

- Tilladte operationer på rækkerne:

  1. $R_i \leftrightarrow R_j$
  2. $R_i := cR_i$ hvor $c \neq 0$
  3. $R_i := R_i + cR_j$ hvor $i \neq j$

- Maple: Illustration af de tilladte operationer.

1.5 Eksempel 2 ved Gausselimination I

Eksempel 2 ved Gausselimination I

- Systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\ -3x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

- Totalmatricen
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Vi vil ved rækkeoperationer bringe matricen på echelonform:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.6 Eksempel 2 ved Gausselimination II

Eksempel 2 ved Gausselimination II

- Rækkeoperationen $R_2 := R_2 - 2R_1$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_3 := R_3 + 3R_1$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_3 := R_3 - 9R_2$ giver nu matricen på echelonform: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 32 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_3 := -\frac{1}{2}R_3$ giver en pænere version: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$

1.7 Eksempel 2 ved Gausselimination III

Eksempel 2 ved Gausselimination III

- Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_3 &= -16 \end{aligned}$$

- Dette kan løses nedefra og op:

1. Først findes $x_3 = -16$
2. Derefter $x_2 = -x_3 - 2 = 16 - 2 = 14$
3. Til sidst $x_1 = -3x_2 - 2x_3 + 3 = -42 + 32 + 3 = -7$

- Løsningen er altså $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \\ -16 \end{bmatrix}$

1.8 Eksempel 2 ved Gausselimination IV

Eksempel 2 ved Gausselimination IV

- Totalmatricen på echelonform var $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- Man kunne gå videre til reduceret echelonform: Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - R_3$ og $R_1 := R_1 - 2R_3$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- Rækkeoperationen $R_1 := R_1 - 3R_2$ giver $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix}$
- Det tilsvarende ligningssystem er nu ekstremt simpelt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 \\ x_2 &= 14 \\ x_3 &= -16 \end{aligned}$$

1.9 De 3 tilfælde

De 3 tilfælde

- Ovenfor så vi et ligningssystem med præcis én løsning. Der er to andre muligheder. Eksempel 3 og 4 i Maple.
- De 3 tilfælde kan illustreres ved følgende 3 eksempler på en til echelonform reduceret totalmatrix:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & \# & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \# & * & * & * \\ 0 & 0 & \# & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- I første tilfælde er der præcis én løsning. Det tilsvarende system løses nedefra og opefter (ingen frie variable).
- I andet tilfælde er der ingen løsning pga. den sidste række, der svarer til en ligning af typen $0 = 5$.
- I tredie tilfælde er der uendeligt mange løsninger. Pivoteringssøjler er søjle 1 og søjle 3, så x_1 og x_3 er basale variable, mens x_2 er fri. Det tilsvarende system løses nedefra og opefter, men med (i dette tilfælde) én fri variabel.

1.10 Linearkombination I

Linearkombination I

- Ved en af linearkombination af vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ forstås et udtryk af formen
$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p$$
hvor $c_1, c_2, \ldots, c_p$ er reelle tal.

- Spørgsmål: Kan vektoren b skrives som en linearkombination af vektorerne a_1, a_2, a_3 hvor
$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vi skal om muligt finde x_1, x_2, x_3, så $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$.

- Systemet skrevet ud:
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 4 \\ -3x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

1.11 Linearkombination II, Span

Linearkombination II, Span

- Men det er jo systemet fra Eksempel 2, hvis totalmatrix kan skrives $[a_1\ a_2\ a_3\ b]$ og som havde løsningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \\ -16 \end{bmatrix}$.

- Altså har vi $-7a_1 + 14a_2 - 16a_3 = b$.

- Generalisering: Vektorligningen $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_pa_p = b$ har samme løsningsmængde som ligningssystemet med totalmatricen $\begin{bmatrix} a_1\ a_2\ \ldots\ a_p\ b \end{bmatrix}$.

- Ved $Span\left(a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$ forstås mængden af linearkombinationer af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

1.12 Matrix-vektor-multiplikation

Matrix-vektor-multiplikation

- Lad A være en $m \times n$-matrix og lad $x \in R^n$. Skriv $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$, hvor $a_i \in R^m$. Produktet Ax defineres ved
$$Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives $Ax = b$.

- Systemet $Ax = b$ har åbenbart en løsning, hvis og kun hvis $b \in Span\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Systemet $Ax = b$ har en løsning for ethvert $b \in R^m$, hvis og kun hvis $Span\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = R^m$.
- Alternativ udregning af Ax: Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x.
- Regneregler: $A\,(u + v) = Au + Av$ og $A\,(cu) = cAu$.