Matrixalgebra

Preben Alsholm

25. februar 2008

1 Matrixalgebra

1.1 Addition og multiplikation med skalar

Addition og multiplikation med skalar

- Addition af matricer. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$
- Den associative regel for addition: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Regler for multiplikation med skalar: $r(A + B) = rA + rB, \quad (r + s)A = rA + sA, \quad (rs)A = r(sA)$
- Maple.

1.2 Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation I

- Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$:

$$AB = A\left[b_1\ b_2\ \ldots\ b_p\right] = \left[Ab_1\ Ab_2\ \ldots\ Ab_p\right]$$

- Ækvivalent definition:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1}$$

- Maple-illustration.

- Den associative regel for multiplikation: $(AB)\,C = A\,(BC)$
- De distributive regler: $A\,(B+C) = AB + AC, \qquad (B+C)\,A = BA + CA$
- Regning med skalar: $r\,(AB) = (rA)\,B = A\,(rB)$

1.3 Matrixmultiplikation II

Matrixmultiplikation II

- AB og BA. Hvornår eksisterer begge?
- Hvornår giver spørgsmålet $AB = BA$ mening?
- Er det i så fald tilfældet?
- Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at $AB \neq BA$. Se Maple for eksempler.
- Enhedsmatricen af størrelse $n \times n$ betegnes med I_n:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Hvis A er $m \times n$, så gælder $I_m A = A I_n = A$.
- Maple.

1.4 Transponering

Transponering

- Den transponerede af matricen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ er matricen

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$ Bemærk rækkefølgen!
- $(rA)^T = rA^T$

1.5 Invers matrix I

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så
$$AC = CA = I$$
I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.
- Hvis A har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at $AC_1 = I$ og $C_2A = I$. Så gælder
$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$
- Den inverse af A betegnes med A^{-1}. Andre betegnelser for *invertibel* er *regulær* og *ikke-singulær*.
- Formel for den inverse til en 2×2-matrix:
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Maple.

1.6 Invers matrix II

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Bevis:
$$\begin{aligned} (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \end{aligned}$$
- Hvis A er invertibel, så er A^T invertibel og $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
- Bevis: $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$
- og $\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$.

1.7 Invers matrix III, Algoritmen

Invers matrix III, Algoritmen

- Vi bestemmer C, så $AC = I$, dette kan skrives $A\,[c_1\; c_2\; \ldots\; c_n] = [e_1\; e_2\; \ldots\; e_n]$.
- Altså $[Ac_1\; Ac_2\; \ldots\; Ac_n] = [e_1\; e_2\; \ldots\; e_n]$.
- Vi løser systemerne $Ax = e_1, Ax = e_2, \ldots, Ax = e_n$.
- De n systemer har samme koefficientmatrix, men n forskellige højresider, der stillet sammen udgør I.
- Totalmatricen med alle højresiderne er dermed $[A \mid I]$.
- Hvis $AC = I$ har en løsning C, så findes den ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \to [I \mid C]$.
- Hermed har vi fundet en højreinvers C.
- De omvendte rækkeoperationer i omvendt rækkefølge vil føre os tilbage $[I \mid C] \to [A \mid I]$.
- - også selv om vi ombytter I og C: $[C \mid I] \to [I \mid A]$.
- Men så har $CD = I$ løsningen $D = A$. Så $CA = I$.
- Dvs. hvis A har højreinversen C, så er C også venstreinvers, og dermed $C = A^{-1}$.
- Maple.

1.8 Den store sætning 8 p. 145

Den store sætning 8 p. 145
Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1. A er invertibel
2. A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3. A har n pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen $Ax = 0$ har kun den trivielle løsning $x = 0$
5. Søjlerne i A er lineært uafhængige
6. Ligningen $Ax = b$ har (mindst) en løsning for ethvert valg af b
7. Søjlerne i A udspænder R^n
8. Matrixligningen $CA = I$ har en løsning C
9. Matrixligningen $AD = I$ har en løsning D