# Underrum af $R^n$, Basis

Preben Alsholm

28. februar 2008

# 1 Underrum af $R^n$, Basis

## 1.1 Underrum af $R^n$

**Underrum**

- En delmængde $U$ af $R^n$ kaldes et underrum af $R^n$, hvis $U \neq \emptyset$ og hvis

$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$

- $R^n$ er et underrum af $R^n$. Et *trivielt* underrum.
- $\{0\}$ (hvor 0 er nulvektoren) er et underrum af $R^n$. Igen et *trivielt* underrum.
- Med $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$ er $Span\left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$ et underrum af $R^n$.
- Altså er følgende et underrum af $R^4$:

$$\left\{ t_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad t_1, t_2, t_3 \in R \right\}$$

- Delmængder af $R^2$, der ikke er underrum: Første kvadrant, højre halvplan.

## 1.2 Basis for underrum I

**Basis for underrum I**

- En basis for et underrum $U$ af $R^n$ er en lineært uafhængig mængde $\left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$ af vektorer, som udspænder $U$, altså $U = Span\left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$.
- Hvis $\left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$ er en basis for underrummet $U$, så kan ethvert $u \in U$ skrives entydigt som en linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_p$:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$$

- Standard basis i $R^n$, den kanoniske basis (her med $n = 4$):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

## 1.3 Basis for underrum II

**Basis for underrum II**

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i $R^n$. Vi ved, at $U = Span\left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$ er et underrum af $R^n$.
- Hvordan finder vi en basis for $U$?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for $U$.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængige, så kan vi blandt vektorerne udtage en basis for $U$:
- Således: Dan matricen $\left[v_1\ v_2\ \ldots\ v_p\right]$. Udfør Gauss-elimination til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af vektorerne $v_1\ v_2\ \ldots\ v_p$, der har disse numre, udgør da en basis for $U$.
- Hvis nemlig pivoteringssøjlerne er nummer $1, 7$ og $9$, så er $v_1, v_7, v_9$ lineært uafhængige idet $[v_1\ v_7\ v_9]\, x = 0$ kun har nulløsningen,
- og hvis $b$ kan skrives som en linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_p$, så kan $b$ også skrives som en linearkombination af kun $v_1, v_7, v_9$.
- Maple.

## 1.4 Basis for søjlerum for matrix

**Basis for søjlerum for matrix**

- Lad $A = \left[v_1\ v_2\ \ldots\ v_p\right]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Søjlerummet for $A$ er $Span\left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$. (Lay: $Col\,(A)$).
- $Ax$ er netop en linearkombination af søjlerne i $A$, så

$$Col\,(A) = \left\{ Ax \,\middle|\, x \in R^4 \right\}$$

- Ligningssystemet $Ax = b$ har altså en løsning for $x$ netop når $b \in Col\,(A)$.
- En basis for søjlerummet findes åbenbart som beskrevet på foregående side:
- Udfør Gauss-elimination på $A$ til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af de *oprindelige* søjler, der har disse numre, udgør da en basis for $Col\,(A)$.
- En anden basis for $Col\,(A)$ kan findes ved Gauss-elimination på $A^T$. Rækkerne i echelonformen for $A^T$ udgør nu en basis for $Col\,(A)$. Rækkerne bør selvfølgelig skrives som søjler i svaret.

## 1.5 Basis for nulrum for matrix

**Basis for nulrum for matrix**

- Nulrummet for matricen $A$ ($Nul\,(A)$) er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.
- Ved løsningen af $Ax = 0$ er der to tilfælde:
- Enten er kun nulvektoren løsning. Så er $Nul\,(A) = \{0\}$.
- Eller der er uendeligt mange løsninger, i hvis beskrivelse indgår et antal frie parametre:
$$x = t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_pv_p$$
- Ved brug af den sædvanlige algoritme, vil vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ automatisk være lineært uafhængige og derfor udgøre en basis for $Nul\,(A)$.
- Maple.

## 1.6 Dimension af underrum

**Dimension af underrum**

- Hvis vektorerne $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ og $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ begge er baser for underrummet $U$, så er $k = p$.
- Antallet af vektorer i en basis for et underrum $U$ kaldes underrummets dimension, der betegnes $\dim U$.
- Dimensionen af nulrummet for en matrix $A$ er antallet af frie variable ved løsning af $Ax = 0$.
- Dimensionen af søjlerummet for en matrix $A$ er antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af $A$ til echelonform.
- Hvis $A$ er en $m \times n$ matrix, så gælder åbenbart:
$$\dim Col\,(A) + \dim Nul\,(A) = n$$

## 1.7 Rang af matrix

**Rang af matrix**

- *Rangen* af $A$ er dimensionen af søjlerummet, altså antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af $A$ til echelonform.
- Vi kan derfor også skrive
$$rank\,(A) + \dim Nul\,(A) = n$$
- Rangen af $A$ er lig med antal fra nulrækken forskellige rækker i en echelonform for $A$.
- Rangen af $A^T$ er lig rangen af $A$. (jvf. den alternative måde at finde en basis for $Col\,(A)$).