Determinanter

Preben Alsholm

3. marts 2008

1 Determinanter

1.1 Definition af determinant I

Definition af determinant I

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$-matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A.

- Determinanten af A defineres nu (i Lay's bog) således

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \\ &\quad \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} \end{aligned}$$

- hvor (i,j)-komplementet til A (engelsk *cofactor*) C_{ij} er defineret ved $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

1.2 Definition af determinant II

Definition af determinant II

- Med definitionen $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$

- hvor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, bliver determinanten i Lay defineret ved *udvikling i komplementer langs første række*.

- Definitionen er *rekursiv* i den forstand, at $\det A$ bliver defineret ud fra $\det A_{1j}$ for $j = 1, 2, \dots, n$.

- For at fuldstændiggøre definitionen må vi tilføje, at determinanten af en 1×1-matrix (et tal) er tallet selv.
- Determinanten af en 2×2-matrix A findes ved udvikling langs første række til

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det (a_{22}) - a_{12} \det (a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

- Heldigvis det vi kender fra gymnasiet.

1.3 Definition af determinant III

Definition af determinant III

- Udvikling langs første række: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-6) = 34.$
- Sætning 1 (p.204). For ethvert i og j gælder:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

- Udvikling i komplementer langs 3. række: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 34 + 0 = 34.$
- Maple-illustrationer af definitionen og Sætning 1.

1.4 Determinant af triangulær matrix

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  kaldes den *øvre triangulær*.

- Ved udvikling langs første søjle fås

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Gentagen udvikling langs 1. søjle giver $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

1.5 Rækkeoperationernes virkning på determinanten

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_2 := R_2 - 3R_1$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -14 & 17 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Udvikling langs 1. søjle giver videre

$$D = 2\begin{vmatrix} -14 & 17 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 34$$

- Maple-illustrationer.

1.6 Sætninger om determinanten

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\,C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$
- Maple.

1.7 Cramers regel I

Cramers regel I

- Cramers sætning (sætning 7, p.217). Lad $A_i(b) = [a_1\, a_2\, \ldots\, b\, \ldots a_n]$. Antag $\det(A) \neq 0$. Så gælder, at løsningen til $Ax = b$ er givet ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$

- Bevis: Hvis $Ax = b$ fås

$$\begin{aligned} A\ I_i(x) &= A\,[e_1\, e_2\, \ldots\, x\, \ldots\, e_n] = [Ae_1\ Ae_2\ \ldots\ Ax\ \ldots\ Ae_n] \\ &= [a_1\, a_2\, \ldots\, b\, \ldots\, a_n] = A_i(b) \end{aligned}$$

- Så

$$\det(A_i(b)) = \det(A\ I_i(x)) = \det(A)\det(I_i(x)) = \det(A)\,x_i$$

- Af Cramers regel følger:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

  hvor C er matricen af komplementer C_{ij} til A.

1.8 Cramers regel II

Cramers regel II

- Cramers regel og formlen for den inverse har deres anvendelser, men kan ikke anbefales i øvrigt.
- Eksempel. Find x_2, når $Ax = b$ og

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Vi har

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = -4$$

- Maple.