

Eigenverdier og Eigenvektorer

Preben Alsholm

6. marts 2008

1 Eigenverdier og Eigenvektorer

1.1 Definition og Eksempel 1

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *eigenverdi* for A , hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v , der opfylder (1), kaldes en *eigenvektor* hørende til eigenverdien λ .
- Eksempel 1. v er eigenvektor for matricen A , hvor

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Vi beviser påstanden og finder den tilhørende eigenverdi.
- Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5v$$

- Altså er v eigenvektor for A med tilhørende eigenverdi 5.

1.2 Eksempel 2

Eksempel 2

- Påstand: Tallet -2 er eigenverdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

- Vi skal vise, at $Av = -2v$ har en løsning $v \neq 0$. Altså vise, at $(A - (-2)I)v = 0$ har en ikke-triviell løsning v .
- Totalmatricen for systemet $(A + 2I)v = 0$ er

$$\begin{bmatrix} -5+2 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -5+2 & 3 & 0 \\ -9 & -9 & 7+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -9 & -9 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

- Operationerne $R_2 := R_2 - R_1, R_3 := R_3 - 3R_1$ giver

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ så } -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \text{ hvor } x_2 \text{ og } x_3 \text{ er frie.}$$

1.3 Eksempel 2 fortsat

Eksempel 2 fortsat

- Egenvektorerne for A hørende til egenværdien -2 :

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor x_2 og x_3 er frie.

- Egenrummet hørende til λ er $Nul(A - \lambda I)$. Vi ser hér, at $\dim(Nul(A - (-2)I)) = 2$.
- Hvis vi ikke på forhånd vidste, at -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

kunne vi have gjort som følger:

- Vi skal bestemme λ , så $Av = \lambda v$, altså $(A - \lambda I)v = 0$, har en ikke-triviell løsning v .
- Dette er tilfældet, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ ikke er invertibel.

1.4 Eksempel 2 fortsat (2)

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ , så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså løsninger til $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Egenværdierne er rødderne i karakterpolynomiet $\det(A - \lambda I)$.

- I dette tilfælde er karakterpolynomiet

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5 - \lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \end{aligned}$$

- Så foruden egenværdien -2 har A også egenværdien 1 .
- Egenvektorerne hørende til egenværdien 1 bestemmes i Maple-worksheet.

1.5 Lineær uafhængighed af egenvektorer I

Lineær uafhængighed af egenvektorer I

- Hvis v_1, v_2, \dots, v_r er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, så er v_1, v_2, \dots, v_r lineært uafhængige.
- Bevis: Tag først $r = 2$. Antag

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{2}$$

- Ved multiplikation med A fra venstre fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = 0$, altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{3}$$

- Men vi har også af (2) at

$$c_1 \lambda_2 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{4}$$

- (3) minus (4) giver $c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 = 0$, så $c_1 = 0$. Af (2) fås $c_2 = 0$.

1.6 Lineær uafhængighed af egenvektorer II

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.
- Ved multiplikation med A fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 = 0$ altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Men vi har også

$$c_1 \lambda_3 v_1 + c_2 \lambda_3 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Ved subtraktion fås

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_3) v_2 = 0$$

- Af resultatet for $r = 2$ følger, at $c_1 = c_2 = 0$ og derfor, at $c_3 = 0$.
- Således kan fortsættes for $r = 4$ osv.

1.7 Similære matricer

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B , hvis der eksisterer en invertibel matrix P , så $P^{-1}AP = B$.
- Hvis A er similær med B , så er B similær med A .
- A similær med B og B similær med C medfører A similær med C :

$$\begin{aligned}P^{-1}AP = B \wedge Q^{-1}BQ = C &\implies C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)\end{aligned}$$

- Hvis A og B er similære, så har de samme karakterpolynomium.
- Er nemlig $B = P^{-1}AP$, så fås

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

- Men så har vi $\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I)$.