Egenværdier og Egenvektorer, Diagonalisering. Omvendt funktion

Preben Alsholm

10. marts 2008

1 Diagonalisering

1.1 Definition af diagonaliserbar matrix

Definition af diagonaliserbar matrix

- A er diagonaliserbar, hvis A er similær med en diagonalmatrix, dvs. $A = PDP^{-1}$, hvor D er en diagonalmatrix:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

- For en diagonalmatrix gælder for $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

- Hvis $A = PDP^{-1}$, så fås $A^k = PD^kP^{-1}$, da eksempelvis

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(PDP^{-1}\right)^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\ &= PDIDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

1.2 Hovedsætning om diagonaliserbarhed

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- En $n \times n$-matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

- Lad $P = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$. Hvis A er diagonaliserbar, så er $P^{-1}AP$ en diagonalmatrix med egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ for A i diagonalen.

- Bevis. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $P = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$ og $D = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

- Af $D = [\lambda_1 e_1 \quad \lambda_2 e_2 \quad \ldots \quad \lambda_n e_n]$ og $Pe_k = v_k$, fås $PD = [\lambda_1 Pe_1 \quad \lambda_2 Pe_2 \quad \ldots \quad \lambda_n Pe_n] = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \ldots \quad \lambda_n v_n]$.

- Men $AP = [Av_1 \quad Av_2 \quad \ldots \quad Av_n]$.

- Dvs. $AP = PD$ hvis og kun hvis $Av_i = \lambda_i v_i$ for alle i.

- Men P er invertibel, hvis og kun hvis dens søjler $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er lineært uafhængige.

1.3 Eksempel

Eksempel

- $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ har karakterpolynomium $\det\,(A - \lambda I) = -\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 2)^2$.

- Egenværdierne er -2 (med algebraisk multiplicitet 2) og 1, med algebraisk multiplicitet 1.

- Samtlige egenvektorer for A hørende til egenværdien -2 er givet ved $v = sv_1 + tv_2$, hvor $s, t \in R$, og hvor
$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Basis for egenrummet hørende til -2 er $\{v_1, v_2\}$. Den geometriske multiplicitet af egenværdien -2 er 2.

- Egenvektorerne hørende til egenværdien 1 er $v = tv_3$, hvor $t \in R$, og hvor $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$. Basis for egenrummet hørende til 1 er $\{v_3\}$. Den geometriske multiplicitet af egenværdien 1 er 1.

1.4 Eksempel (fortsat) og anden hovedsætning

Eksempel (fortsat) og anden hovedsætning

- De 3 vektorer v_1, v_2, v_3 er lineært uafhængige, hvilket kan vises ved Gauss-elimination af matricen
$$P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Altså er A diagonaliserbar, og

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sætning: En matrix er diagonaliserbar, hvis og kun hvis *den algebraiske multiplicitet* er lig med *den geometriske multiplicitet* for enhver af egenværdierne.
- Om valget af P: Vælg basis i hvert egenrum. Samlet sæt af baser er lineært uafhængigt!

1.5 Eksempel på ikke-diagonaliserbar matrix

Eksempel på ikke-diagonaliserbar matrix

- Lad
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
- Karakterpolynomiet er $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2$.
- Egenværdi 5 med algebraisk multiplicitet 2.
- Vi finder egenvektorerne: Vi skal løse $(A - 5I)\,v = 0$. Vi finder
$$v = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
hvor $t \in R$. Egenværdien 5 har altså geometrisk multiplicitet 1, men den algebraiske var jo 2. Matricen er ikke diagonaliserbar!
- En $n \times n$-matrix med n forskellige egenværdier er diagonaliserbar.
- Der gælder jo, at de tilhørende egenvektorer er lineært uafhængige.

2 Reel funktion af reel variabel

2.1 Omvendt funktion I

Omvendt funktion I

- Lad f være en reel funktion af en reel variabel.
- f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2:
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
- f givet ved $f(x) = x^3$ er enentydig, da for alle x_1, x_2:
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1^3 \neq x_2^3$$

- f kaldes voksende, hvis for alle x_1, x_2:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f givet ved $f(x) = x^3$ er voksende, da for alle x_1, x_2:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^3 < x_2^3$$

- f kaldes aftagende, hvis for alle x_1, x_2:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

2.2 Omvendt funktion II

Omvendt funktion II

- Funktionen f givet ved $f(x) = \frac{1}{x}$ defineret for $x > 0$, er aftagende, da for alle x_1, x_2:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

- Funktionen f kaldes monoton, hvis den er enten voksende eller aftagende.
- Hvis f er monoton, så er f enentydig.
- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved

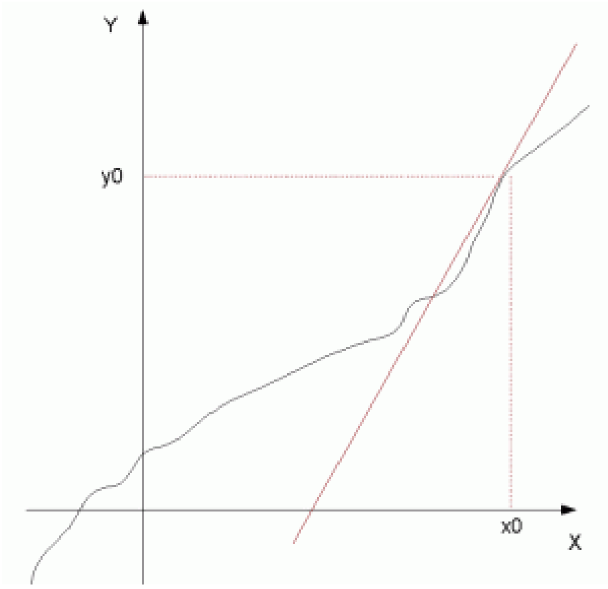
$$f^{-1}(a) = b \Longleftrightarrow f(b) = a$$

dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.

- Lad f være enentydig. Vi har for alle x: $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ og $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$.

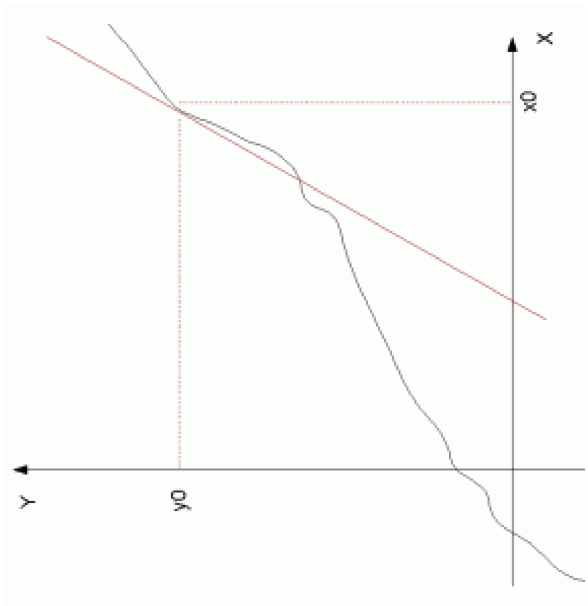
2.3 Omvendt funktion III

Omvendt funktion III



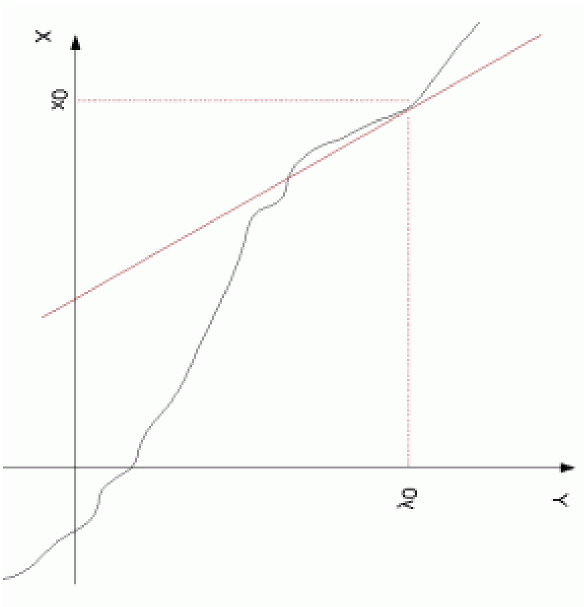
2.4 Omvendt funktion III drejet 90 grader

Omvendt funktion III drejet 90 grader



2.5 Omvendt funktion III drejet 90 grader og spejlet i 2. aksen

Omvendt funktion III drejet 90 grader og spejlet i 2. aksen



2.6 Omvendt funktion IV

Omvendt funktion IV

- Hvis f er differentiabel i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
- Med $y = f(x)$ er $x = f^{-1}(y)$ så $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ og $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy}$. Så det ovenstående kan skrives
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$
- hvilket jo blot ligner en anvendelse af brøkregningsreglen
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$$
- Eksempel: $f(x) = e^x$. Se i øvrigt Maple.