Funktion af flere variable

Preben Alsholm

21. april 2008

1 Funktion af flere variable

1.1 Grænseværdi, definition og Eksempel 3

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- Skal give mening til $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b), for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b).
- Funktionen f siges at have grænseværdien L, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

- Eksempel 3, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

- Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$.
- Vi har $f(x,x) = 1$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$.
- Vi konkluderer, at $f(x,y)$ ikke har nogen grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$.

1.2 Grænseværdi, Eksempel 4

Grænseværdi, Eksempel 4

- Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

- Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$.
- Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x,kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \to 0 \text{ for } x \to 0$$

- Det er nærliggende at tro, at $f(x,y)$ har grænseværdien 0 for $(x,y) \to (0,0)$. Men det er GALT!
- Vi har nemlig for alle $x \neq 0$
$$f\left(x, x^2\right) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$
- Altså har $f(x,y)$ ikke nogen grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$.

1.3 Grænseværdi, Eksempel 5

Grænseværdi, Eksempel 5

- Eksempel 5, p.649: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved
$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$
- Vi vil vise, at $f(x,y) \to 0$ for $(x,y) \to (0,0)$.
- Vi har
$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|y| \\ &\leq |y| \end{aligned}$$
- Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis blot $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ vil også $|y| < \varepsilon$ og dermed $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.
- Altså har $f(x,y)$ grænseværdien 0 for $(x,y) \to (0,0)$.

1.4 Kontinuitet, Definition

Kontinuitet, Definition

- Lad f være defineret i (a,b) og antag, at der i enhver omegn om (a,b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b).
- f siges da at være kontinuert i (a,b), hvis
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$
- Hvis f er kontinuert i alle punkter af sit definitionsområde, siges den blot at være kontinuert.
- Hvis f og g begge er kontinuerte i (a,b), så er $f+g, f-g, fg$ kontinuerte i (a,b).
- Hvis yderligere $g(a,b) \neq 0$ så er $\frac{f}{g}$ kontinuert i (a,b).
- Antag, at $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ og at F er en funktion af én variabel, der er kontinuert i L.
- Så gælder
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$$

1.5 Partiel differentiation, Definition

Partiel differentiation, Definition

- Hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

  eksisterer, siges f at have en partiel afledet i punktet (x, y) mht. den første variabel (x).

- Den partielle afledede betegnes med $f_1(x, y)$. Altså

$$f_1(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- Analogt defineres $f_2(x, y)$:

$$f_2(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

- Andre betegnelser er f_x eller $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, eller hvis vi skriver $z = f(x, y)$, så $\frac{\partial z}{\partial x}$. Betegnelsen $D_1 f(x, y)$ bruges også af Adams.

1.6 Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

- $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \cos(2x + 3y) \cdot 2 \\ f_2(x, y) &= \cos(2x + 3y) \cdot 3 \end{aligned}$$

- De nye funktioner f_1 og f_2 har selv partielle afledede:

$$\begin{aligned} f_{11}(x, y) &= (f_1)_1(x, y) = -4\sin(2x + 3y) \\ f_{12}(x, y) &= (f_1)_2(x, y) = -6\sin(2x + 3y) \\ f_{21}(x, y) &= (f_2)_1(x, y) = -6\sin(2x + 3y) \\ f_{22}(x, y) &= (f_2)_2(x, y) = -9\sin(2x + 3y) \end{aligned}$$

- Sætning 1 (p. 659). Hvis f_1 og f_2 er kontinuerte i en omegn af (a, b) og f_{12} eksisterer i en omegn af (a, b) og er kontinuert i punktet (a, b), så eksisterer også $f_{21}(a, b)$ og der gælder: $f_{21}(a, b) = f_{12}(a, b)$.

1.7 Tangentplan

Tangentplan

- Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.

- En vektor på tangenten er $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{i} + f_1(a,b)\,\boldsymbol{k}$.
- Tilsvarende har kurven $z = f(a,y)$ har for $y = b$ hældningskoefficienten $f_2(a,b)$.
- En vektor på tangenten er $\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{j} + f_2(a,b)\,\boldsymbol{k}$.
- Normalvektoren til tangentplanen er da

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}_2 \times \boldsymbol{T}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & f_2(a,b) \\ 1 & 0 & f_1(a,b) \end{vmatrix} = f_1(a,b)\,\boldsymbol{i} + f_2(a,b)\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

- Tangentplanens ligning er derfor

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x-a)\,\boldsymbol{i} + (y-b)\,\boldsymbol{j} + (z - f(a,b)\,\boldsymbol{k})) = 0$$

altså

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$