

# Funktion af flere variable

Preben Alsholm

24. april 2008

## 1 Funktion af flere variable

### 1.1 Differentiabilitet for funktion af én variabel

Differentiabilitet for funktion af én variabel

- $f$  kaldes differentiabel i  $a$ , hvis grænseværdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med  $f'(a)$ .

- Lineariseringen i punktet  $a$  for funktion af én variabel:  $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
- Ligningen for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $(a, f(a))$  er  $y = L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
- Hvis  $f$  er differentiabel i  $a$  så

$$\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} \rightarrow 0 \text{ for } h \rightarrow 0$$

- Dette følger af at

$$\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

### 1.2 Differentiabilitet for funktion af 2 variable

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt  $(a, b)$  er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er  $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$
- Højresiden kaldes lineariseringen af  $f(x, y)$  i  $(a, b)$ .

- Definition:  $f$  er differentiabel i  $(a, b)$  hvis  $f$  har partielle afledede i  $(a, b)$  og der gælder

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_1(a, b)h - f_2(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0$$

for  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

- Hermed sikres det, at lineariseringen bliver en god approksimation til funktionen i omegnen af  $(a, b)$ .
- Sætning 4 (p.674). Hvis  $f$  har partielle afledede  $f_1$  og  $f_2$  i en omegn af  $(a, b)$ , og hvis disse er kontinuerte i  $(a, b)$ , så er  $f$  differentiabel i  $(a, b)$ .
- Approksimation ved linearisering: Eksempel 1 p. 673: Maple.

### 1.3 Gradienten

#### Gradienten

- Gradienten af en funktion  $f$  af 2 variable er vektoren

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Betegnelsen  $\nabla f(x, y)$  bruges også.  $\nabla$  kaldes nabla.
- For en funktion  $f$  af 3 variable er definitionen tilsvarende

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

- Sætning 6 (p.681): For en differentiabel funktion gælder, at gradienten i et punkt  $(a, b)$  er vinkelret på niveaukurven for  $f$  gennem punktet,  $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$ .
- Maple-illustration

### 1.4 Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

#### Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet  $a$  kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for  $f$ , hvis  $f(x) > f(a)$  for alle  $x$  i et interval omkring  $a$  og med  $x \neq a$ .
- Punktet  $a$  kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for  $f$ , hvis  $f(x) < f(a)$  for alle  $x$  i et interval omkring  $a$  og med  $x \neq a$ .
- Fællesbetegnelse for disse to er ekstremumpunkt.
- Punktet  $a$  kaldes et globalt minimumspunkt for  $f$ , hvis  $f(x) \geq f(a)$  for alle  $x$ .

- Punktet  $a$  kaldes et globalt maksimumspunkt for  $f$ , hvis  $f(x) \leq f(a)$  for alle  $x$ .
- Mindsteværdien for  $f$  er værdien af  $f$  i et globalt minimumspunkt.
- Størsteværdien for  $f$  er værdien af  $f$  i et globalt maksimumspunkt.

## 1.5 Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

### Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis  $f$  er differentiabel i det indre punkt  $c$  og hvis  $f$  har lokalt ekstremum i  $c$ , så gælder, at  $f'(c) = 0$ .
- Definition: Hvis  $f'(c) = 0$  vil  $c$  blive kaldt et stationært punkt for  $f$ .
- Sætning 2 side 218: Ekstremumspunkterne for  $f$  på intervallet  $I = [a, b]$  findes blandt
  1. Stationære punkter for  $f$ . (Critical points)
  2. Punkter hvor  $f$  ikke er differentiabel. (Singular points)
  3. Endepunkterne for intervallet  $I$ .

## 1.6 Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

### Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad  $x_0$  være et stationært punkt for  $f$ . Antag, at  $f''(x_0)$  eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis  $f''(x_0) < 0$  så er  $x_0$  et egentligt lokalt maksimumspunkt for  $f$ .
  2. Hvis  $f''(x_0) > 0$  så er  $x_0$  et egentligt lokalt minimumspunkt for  $f$ .
- Bevis:

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

- Så  $f''(x_0) < 0$  betyder, at for  $|h|$  lille nok gælder

$$\frac{f'(x_0 + h)}{h} < \frac{1}{2}f''(x_0) < 0$$

- For  $h > 0$  betyder dette, at  $f'(x_0 + h) < 0$
- og for  $h < 0$  betyder det, at  $f'(x_0 + h) > 0$ .
- Men så må  $x_0$  være et maksimumspunkt.

## 1.7 Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

### Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad  $f$  være defineret i det åbne interval  $I$  og lad  $a \in I$ . Antag, at  $f$  er  $n$  gange differentiabel, hvor  $n \geq 2$ , og at  $f^{(n)}$  er kontinuert i  $a$ . Antag, at  $f'(a) = 0$ . Så gælder
  1. Hvis  $f''(a) > 0$ , så er  $a$  et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis  $f''(a) < 0$ , så er  $a$  et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  2. Hvis  $f''(a) = 0$  og  $f'''(a) \neq 0$ , så har  $f$  ikke lokalt ekstremum i  $a$ .
  3. Hvis  $f''(a) = f'''(a) = 0$ , så gælder: Hvis  $f^{(4)}(a) > 0$ , så er  $a$  et egentligt lokalt minimumspunkt og hvis  $f^{(4)}(a) < 0$ , så er  $a$  et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  4. Generelt: Lad  $f^{(n)}(a)$  være den første afledede forskellig fra nul. Hvis  $n$  er ulige, har  $f$  ikke lokalt ekstremum i  $a$ . Hvis  $n$  er lige har  $f$  egentligt lokalt minimum i  $a$ , hvis  $f^{(n)}(a) > 0$ , og egentligt lokalt maksimum i  $a$ , hvis  $f^{(n)}(a) < 0$ .
- Bevis: Se Taylor-noterne på hjemmesiden. Maple.

## 1.8 Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

### Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet  $(a, b)$  kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for  $f$ , hvis  $f(x, y) > f(a, b)$  for alle  $(x, y)$  i en omegn omkring  $(a, b)$  og med  $(x, y) \neq (a, b)$ .
- Analogt defineres egentligt lokalt maksimumspunkt. Fællesbetegnelse for disse to er *ekstremumspunkt*.
- Punktet  $(a, b)$  kaldes et globalt minimumspunkt for  $f$ , hvis  $f(x, y) \geq f(a, b)$  for alle  $(x, y)$ .
- Analogt defineres globalt maksimumspunkt.
- Mindsteværdien for  $f$  er værdien af  $f$  i et globalt minimumspunkt. Størsteværdien er værdien af  $f$  i et globalt maksimumspunkt.
- Begreberne Indre punkt, randpunkt, åben mængde, lukket (afsluttet) mængde, begrænset mængde defineres på tavlen med kridt. Se i øvrigt Adams, p. 541-542.

## 1.9 Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

### Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis  $f$  er differentiabel i det indre punkt  $c$  og hvis  $f$  har lokalt ekstremum i  $(a, b)$ , så gælder, at  $f_1(a, b) = 0$  og  $f_2(a, b) = 0$ .

- Definition: Hvis  $\nabla f(a, b) = (0, 0)$  vil  $(a, b)$  blive kaldt et stationært punkt for  $f$ .
- Sætning 1 side 708: Ekstremumpunkterne for  $f$  på mængden  $S$  findes blandt
  1. Stationære punkter for  $f$ . (Critical points)
  2. Punkter hvor  $f$  ikke har partielle afledede. (Singular points)
  3. Randpunkterne for  $S$ . (Boundary points)