Ekstremum for funktion af flere variable

Preben Alsholm

28. april 2008

1 Ekstremum for funktion af flere variable

1.1 Hessematricen I

Hessematricen I

- Et stationært punkt for en funktion af flere variable f vil her blive kaldt et *egentligt* saddelpunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt minimum.
- Lad f være en funktion af n variable. Antag, at f har partielle afledede af anden orden i punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Hessematricen for f i punktet a er den matrix $H(a)$, hvis element (i, j) er
$$f_{ij}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$
- Er f en funktion af 2 variable x og y er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2)$ altså givet ved
$$H(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} f_{11}(a_1, a_2) & f_{12}(a_1, a_2) \\ f_{12}(a_1, a_2) & f_{22}(a_1, a_2) \end{bmatrix}$$

1.2 Hessematricen II

Hessematricen II

- Er f en funktion af 3 variable x, y og z er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2, a_3)$ givet ved
$$H(a) = \begin{bmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & f_{13}(a) \\ f_{12}(a) & f_{22}(a) & f_{23}(a) \\ f_{13}(a) & f_{23}(a) & f_{33}(a) \end{bmatrix}$$
- Eksempel. Funktionen f givet ved $f(x, y) = x^2 - x^2 y + 2y^2$ har partielle afledede
$$f_1(x, y) = 2x - 2xy \text{ og } f_2(x, y) = -x^2 + 4y$$
- Hessematricen i punktet (x, y) er
$$\begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$$

1.3 Hessematricen III

Hessematricen III

- Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- Lad f være en funktion af n variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Antag, at a er et stationært punkt for f. Lad $H(a)$ være Hessematricen for f i a.
- Så gælder

  1. Hvis egenværdierne for $H(a)$ alle er positive, så er a et egentligt minimumspunkt.
  2. Hvis egenværdierne alle er negative, er a et egentligt maksimumspunkt.
  3. Hvis to af egenværdierne for $H(a)$ har forskellige fortegn, så er a et egentligt saddelpunkt.
  4. Hvis mindst én af egenværdierne er lig med nul og resten har samme fortegn, så må en nærmere undersøgelse foretages.

1.4 Hessematricen IV

Hessematricen IV

- Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ = \ & f(a) + f_1(a)\,h_1 + f_1(a)\,h_2 \\ & + \frac{1}{2}\left(f_{11}(a+\xi h)\,h_1^2 + 2f_{12}(a+\xi h)\,h_1 h_2 + f_{22}(a+\xi h)\,h_2^2\right) \\ = \ & f(a) + f_1(a)\,h_1 + f_2(a)\,h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a+\xi h)\,h \end{aligned}$$

- I et stationært punkt a fås dermed

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h^T H(a+\xi h)\,h$$

- Det afgørende er dermed fortegnet for $\frac{1}{2}h^T H(a+\xi h)\,h$ for små h.
- Hvis $H(a)$ har udelukkende positive egenværdier, så er $h^T H(a)\,h > 0$ for alle h.
- Derfor gælder for små h: $h^T H(a+\xi h)\,h > 0$.

1.5 Eksempel

Eksempel

- $f(x,y) = x^2 - x^2y + 2y^2$ fra tidligere. Stationære punkter er $(0,0)$ og $(\pm 2, 1)$.
- Vi fandt tidligere $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$.
- Heraf fås

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(2,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for $H(0,0)$ er åbenbart 2 og 4, altså positive, så $(0,0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt.
- $H(2,1)$ og $H(-2,1)$ har de samme egenværdier, nemlig $2 \pm 2\sqrt{5}$.Den ene er dermed positiv,den anden er negativ. Punkterne $(\pm 2, 1)$ er egentlige saddelpunkter.

1.6 Spor og determinant

Spor og determinant

- Lad $n \times n$-matricen A have egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Så gælder, at

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ Spor(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \end{aligned}$$

- Let bevist for $n = 2$:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

- Men også

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - Spor(A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

- Resultatet følger ved sammenligning.

1.7 Spor og determinant II

Spor og determinant II

- Lad f være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet (a,b). Antag, at (a,b) er et stationært punkt for f. Lad $H(a,b)$ være Hessematricen for f i (a,b). Så gælder

  1. Hvis $\det H(a,b) > 0$, så er (a,b) et egentligt ekstremumspunkt.
     (a) Hvis $Spor(H(a,b)) > 0$, så er (a,b) et egentligt minimumspunkt.
     (b) Hvis $Spor(H(a,b)) < 0$, så er (a,b) et egentligt maksimumspunkt.
  2. Hvis $\det H(a,b) < 0$, så er (a,b) et egentligt saddelpunkt.
  3. Hvis $\det H(a,b) = 0$ må en nærmere undersøgelse foretages.

- Eksempel: $H(2,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ fra tidligere.

1.8 Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form I (baggrund)

- Lad A være en symmetrisk matrix. Udtrykket $x^T Ax$ hvor x er en vektor af variable kaldes da en kvadratisk form.

- Er A en 2×2-matrix, så har vi

$$\begin{aligned} x^T Ax &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \end{aligned}$$

- A kaldes positiv definit, hvis $x^T Ax > 0$ for alle $x \neq 0$.

- A kaldes negativ definit, hvis $x^T Ax < 0$ for alle $x \neq 0$.

- A kaldes indefinit, hvis der eksisterer et x så $x^T Ax > 0$ og et x så $x^T Ax < 0$.

1.9 Kvadratisk form II

Kvadratisk form II

- Enhver reel symmetrisk matrix A er diagonaliserbar.

- Desuden gælder, at egenvektorer for A hørende til forskellige egenværdier er ortogonale.

- Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix P så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.

- Så gælder: $P^T P = I$, dvs. $P^{-1} = P^T$.
- Hermed er $P^T AP = D$ diagonal og $A = PDP^T$
- Med $y = P^T x$ fås $x^T Ax = x^T PDP^T x = \left(P^T x\right)^T D \left(P^T x\right) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$.
- A er positiv definit, hvis og kun hvis alle egenværdier er positive.
- A er negativ definit, hvis og kun hvis alle egenværdier er negative.
- A er indefinit, hvis A har både positive og negative egenværdier.