Planintegralet

Preben Alsholm

5. maj 2008

1 Planintegralet

1.1 Integralet af en funktion af én variabel

Det bestemte integral, Definition

- Lad f være en funktion defineret på intervallet $[a, b]$. Lad $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ være en *inddeling* af $[a, b]$.
- Vælg i hvert delinterval $[x_{i-1}, x_i]$ et tal t_i. Summen

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

  kaldes en *Riemann-sum* svarende til den givne inddeling og de valgte punkter t_i.

- f kaldes *integrabel* på $[a, b]$, hvis der findes et tal I, så der til ethvert $\varepsilon > 0$, eksisterer et tal $\delta > 0$, så der for enhver inddeling og ethvert valg punkter t_i med $\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$ gælder

$$I - \varepsilon < R < I + \varepsilon$$

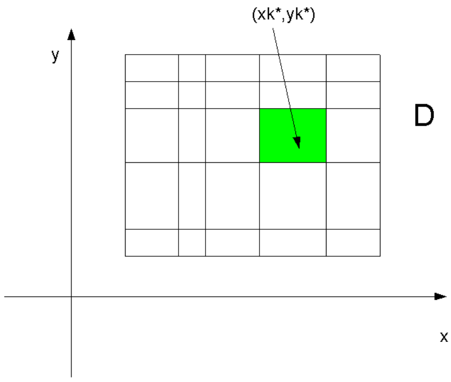
- I kaldes da *integralet* og betegnes med $\int_a^b f(x)\,dx$.

- Riemann-integralet er opkaldt efter den tyske matematiker Bernhard Riemann, 1826-1866.

1.2 Planintegralets definition I

Planintegralets definition I

- Vi vil definere planintegralet $\iint_D f(x, y)\,dA$ så det med rimelighed kan *tolkes* som rumfanget af området under grafen for f og over området D, når $f(x, y) > 0$ for $(x, y) \in D$.
- Lad først D være et akseparallelt rektangel. Inddel i delrektangler R_k med arealer ΔA_k. Vælg i hvert delrektangel et punkt (x_k^*, y_k^*).



1.3 Planintegralets definition II

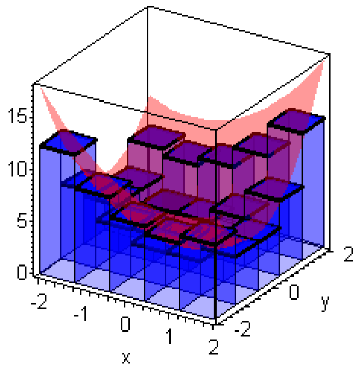
Planintegralets definition II

- Summen

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

  kaldes en Riemannsum svarende til den valgte inddeling P i delrektangler.

- Riemannsummen kan selv tolkes som det samlede rumfang af n kasser.



1.4 Planintegralets definition III

Planintegralets definition III

- Normen af inddelingen P defineres som den største af delrektanglernes diagonaler:

$$\|P\| = \max_{1 \le k \le n} diam(R_k)$$

- f kaldes integrabel på D, hvis der findes et tal I, så der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, så

$$\|P\| < \delta \Longrightarrow |R(f, P) - I| < \varepsilon$$

uanset valget af punkterne $\left(x_k^*, y_k^*\right)$ i delrektanglerne.

- Tallet I kaldes integralet og betegnes med

$$\iint_D f\left(x,y\right) dA$$

1.5 Eksempler

Eksempler

- For en konstant funktion $f\left(x,y\right) = k$ fås åbenbart

$$\iint_D f\left(x,y\right) dA = \iint_D k dA = k \cdot \text{areal}\left(D\right)$$

- Eksempel 1 i Adams (p.756). Vi vil finde en en Riemannsum for

$$\iint_D \left(x^2 + y\right) dA$$

  hvor $D = [0,1] \times [0,1]$ ved at inddele kvadratet i 4 lige store delrektangler og vælge midtpunktet i hvert af disse.

- De 4 punkter: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ og $\Delta A_k = \frac{1}{4}$ for alle k.

- Riemannsummen bliver $\sum_{k=1}^{4} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = 0.8125$.

- Se også Maple-worksheet for illustrationer af Riemannsummer.

1.6 Planintegralets definition III

Planintegralets definition III

- Lad D være et begrænset område i planen på hvilket f er defineret. Definér en ny funktion $\widehat{f}$ ved

$$\widehat{f}\left(x,y\right) = \begin{cases} f\left(x,y\right) & \left(x,y\right) \in D \\ 0 & \left(x,y\right) \notin D \end{cases}$$

- Vælg et akseparallelt rektangel R, så $D \subseteq R$.

- Hvis $\widehat{f}$ er integrabel på R, vil vi sige, at f er integrabel på D og vi sætter

$$\iint_D f\left(x,y\right) dA = \iint_R \widehat{f}\left(x,y\right) dA$$

- Vi bør overbevise os om, at valget af R ikke har indflydelse på resultatet.

- Sætning 1 p.757. Hvis f er kontinuert på en lukket og begrænset mængde D, hvis rand består af endeligt mange kurver af endelig længde, så er f integrabel på D.

1.7 Planintegralets egenskaber

Planintegralets egenskaber

- $\iint_D 1dA$ =arealet af D. (Kunne tages som definition af areal).
- Når $f(x,y) \geq 0$ for $(x,y) \in D$:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = V$$

  hvor V er rumfanget af området over D og under grafen for f.

- Linearitet: Når a og b er konstanter:

$$\iint_D (af(x,y) + bg(x,y))\, dA = a \iint_D f(x,y)\, dA + b \iint_D g(x,y)\, dA$$

- Opdeling. Hvis $D = D_1 \cup D_2$ med $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ og f er integrabel på både D_1 og D_2 så er f integrabel på D og

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA$$

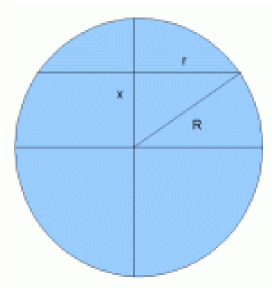
1.8 Rumfang ved salamimetoden

Rumfang ved salamimetoden

- Læg en x-akse et passende sted. Lad tværsnitsarealet være $A(x)$ i punktet x. Så er rumfanget

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

- Vi finder rumfanget af en kugle med radius R.

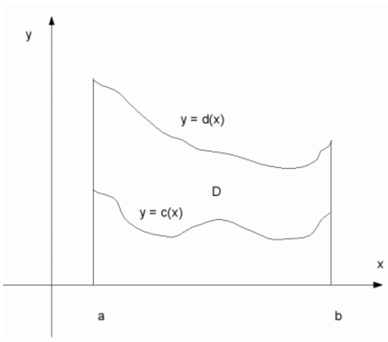


- $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ så $A(x) = \pi r^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right)$ og $V = 2\int_0^R A(x)\, dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1.9 Opløsning af planintegralet i et dobbeltintegral I

Opløsning af planintegralet i et dobbeltintegral I

- Lad D være et område givet ved $D = \{(x, y) \,| a \leq x \leq b \wedge c(x) \leq y \leq d(x)\}$ hvor c og d er to funktioner.



- Området D kaldes i Adams y-simpel.

1.10 Opløsning af planintegralet i et dobbeltintegral II

Opløsning af planintegralet i et dobbeltintegral II

- Når $D = \{(x, y) \,| a \leq x \leq b \wedge c(x) \leq y \leq d(x)\}$ gælder

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

- Dette resultat kan vises ved salamimetoden: $A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$ er tværsnitarealet af området under grafen og over D.

- Når $D = \{(x, y) \,| c \leq y \leq d \wedge a(y) \leq x \leq b(y)\}$ kaldes D x-simpel og der gælder

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

- Dobbeltintegraler skrives ofte med det ydre dx (eller dy) lige efter det ydre integraltegn:

$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

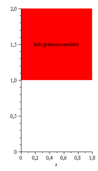
1.11 Eksempel 1 p. 762

Eksempel 1 p. 762

- Vi skal udregne planintegralet

$$\iint_D (4 - x - y)\, dA$$

over området $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$. Området er et akseparallelt rektangel (kvadrat).



- Vi har $\iint_D (4 - x - y)\, dA = \int_0^1 \left(\int_1^2 (4 - x - y)\, dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_1^2 (4 - x - y)\, dy$

- Altså fås $\iint_D (4 - x - y)\, dA = \int_0^1 \left[4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x \right) dx = \left[\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = 2.$

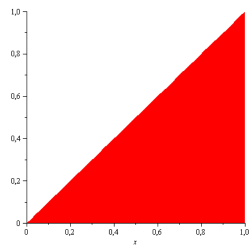
1.12 Eksempel 2 p. 763

Eksempel 2 p. 763

- Vi skal udregne planintegralet

$$\iint_D xy\, dA$$

over området $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$. Området er en trekant.



- Vi har $\iint_D xy\, dA = \int_0^1 dx \int_0^x xy\, dy$

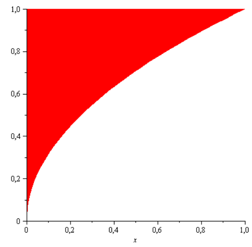
- Videre fås $\int_0^1 dx \int_0^x xy\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$

1.13 Eksempel 3 p. 764

Eksempel 3 p. 764

- Det er ikke let at finde dobbeltintegralet $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy$.

- men vi ser, at dobbeltintegralet er lig med planintegralet $\iint_D e^{y^3} dA$ over $D = \left\{(x,y) \,|0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 1\right\}$.



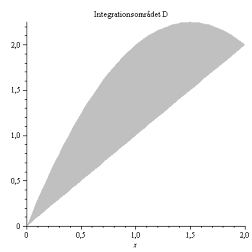
- D kan også beskrives ved $D = \left\{(x,y) \,|0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y^2\right\}$. Derfor fås:

- $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy = \iint_D e^{y^3} dA = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3} dx = \int_0^1 \left[xe^{y^3}\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3}(e-1)$.

1.14 Eksempel A

Eksempel A

- Vi skal finde planintegralet $\iint_D (x^2 - xy)\, dA$ over området mellem linien $y = x$ og parablen $y = 3x - x^2$.



- Skæringspunkter har $x = 0$ og $x = 2$. Vi har derfor $\iint_D (x^2 - xy)\, dA = \int_0^2 dx \int_x^{3x-x^2} (x^2 - xy)\, dy$

- Videre fås $\int_0^2 dx \int_x^{3x-x^2} (x^2 - xy)\, dy = \int_0^2 \left[x^2 y - \frac{1}{2}xy^2\right]_x^{3x-x^2} dx = \int_0^2 \left(x^2(3x - x^2) - \frac{1}{2}x(3x-x^2)^2 -\right.$

- $= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^5 + 2x^4 - 2x^3\right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = -\frac{8}{15}$.