

Den komplekse eksponentialfunktion

Preben Alsholm

11. februar 2008

Definitionen

- ▶ Den velkendte eksponentialfunktion

$$x \rightarrow e^x$$

vil vi ofte ligesom i Maple give navnet \exp . Vi har altså

$$\exp(x) = e^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Definitionen

Egenskaber for \exp

Polær form

Moirves formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Definitionen

- ▶ Den velkendte eksponentialfunktion

$$x \rightarrow e^x$$

vil vi ofte ligesom i Maple give navnet exp. Vi har altså

$$\exp(x) = e^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

- ▶ Denne funktion har den fundamentale egenskab

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

eller anderledes skrevet $e^{x+y} = e^x e^y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Definitionen

- ▶ Den velkendte eksponentialfunktion

$$x \rightarrow e^x$$

vil vi ofte ligesom i Maple give navnet `exp`. Vi har altså

$$\exp(x) = e^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

- ▶ Denne funktion har den fundamentale egenskab

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

eller anderledes skrevet $e^{x+y} = e^x e^y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- ▶ *Vi definerer nu*

$$\exp(x + iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

eller anderledes skrevet

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

gældende for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for `exp`

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Egenskaber for exp

- ▶ Tallet e^{x+iy} har åbenbart modulus e^x og argument y :

$$|e^{x+iy}| = e^x \quad \arg(e^{x+iy}) = y$$

når $x, y \in \mathbb{R}$.

Egenskaber for exp

- ▶ Tallet e^{x+iy} har åbenbart modulus e^x og argument y :

$$|e^{x+iy}| = e^x \quad \arg(e^{x+iy}) = y$$

når $x, y \in \mathbb{R}$.

- ▶ For alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

eller anderledes skrevet $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Egenskaber for exp

- Tallet e^{x+iy} har åbenbart modulus e^x og argument y :

$$|e^{x+iy}| = e^x \quad \arg(e^{x+iy}) = y$$

når $x, y \in \mathbb{R}$.

- For alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

eller anderledes skrevet $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

- Bevis: Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, så har vi:

$$\begin{aligned} |e^{z_1} \cdot e^{z_2}| &= |e^{z_1}| \cdot |e^{z_2}| = |e^{x_1+iy_1}| \cdot |e^{x_2+iy_2}| = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\ &= e^{x_1+x_2} = \left| e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \right| = |e^{z_1+z_2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(e^{z_1} \cdot e^{z_2}) &= \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = \arg(e^{x_1+iy_1}) + \arg(e^{x_2+iy_2}) \\ &= y_1 + y_2 = \arg\left(e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}\right) = \arg(e^{z_1+z_2}) \end{aligned}$$

Tallene $e^{z_1+z_2}$ og $e^{z_1} e^{z_2}$ har altså samme modulus og samme argument. De er derfor ens.

Polær form

- ▶ Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev sidste gang skrevet

$$a = r (\cos v + i \sin v)$$

Den vil i fremtiden blive skrevet således:

$$a = r \exp(iv) = re^{iv}$$

Polær form

- ▶ Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev sidste gang skrevet

$$a = r (\cos v + i \sin v)$$

Den vil i fremtiden blive skrevet således:

$$a = r \exp(iv) = re^{iv}$$

- ▶ Eksempel. Vi finder den polære form for tallet

$-\sqrt{3} - i$. Modulus er $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. Tegn! Så

$$-\sqrt{3} - i = 2 \exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

Polær form

- ▶ Den polære form for tallet a med modulus r og argument v blev sidste gang skrevet

$$a = r (\cos v + i \sin v)$$

Den vil i fremtiden blive skrevet således:

$$a = r \exp(iv) = re^{iv}$$

- ▶ Eksempel. Vi finder den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$. Modulus er $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. Tegn! Så

$$-\sqrt{3} - i = 2 \exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

- ▶ Maple-worksheet til og med Eksempel 25.

Moivres formel

- ▶ For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Moivres formel

- ▶ For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ **Bevis:**

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Moivres formel

- ▶ For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ Bevis:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ Eksempel.

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \operatorname{Re}(\cos 3x + i \sin 3x) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

Moivres formel

- ▶ For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ Bevis:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ Eksempel.

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \operatorname{Re}(\cos 3x + i \sin 3x) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

- ▶ Ved ovenfor at erstatte Re med Im fås formlen

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\ &= 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x \\ &= -4 \sin^3 x + 3 \sin x\end{aligned}$$

Moivres formel

- ▶ For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ Bevis:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

- ▶ Eksempel.

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \operatorname{Re}(\cos 3x + i \sin 3x) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

- ▶ Ved ovenfor at erstatte Re med Im fås formlen

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\ &= 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x \\ &= -4 \sin^3 x + 3 \sin x \end{aligned}$$

- ▶ [Maple-worksheet Eksempel 27](#)

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Den binome ligning

- ▶ En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a \quad (1)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{C}$. Ubekendt: z .

Den binome ligning

- ▶ En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a \quad (1)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{C}$. Ubekendt: z .

- ▶ Vil finde "samtlige komplekse n 'te rødder af a ". En kompleks n 'te rod af a er et tal som opløftet til n 'te giver a .

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Den binome ligning

- ▶ En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a \quad (1)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{C}$. Ubekendt: z .

- ▶ Vil finde "samtlige komplekse n 'te rødder af a ". En kompleks n 'te rod af a er et tal som opløftet til n 'te giver a .
- ▶ **Formel.** Rødderne i den binome ligning (1), hvor $a = re^{i\nu}$, $r \geq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, er givet ved

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\nu}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moivres formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Den binome ligning

- ▶ En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a \quad (1)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{C}$. Ubekendt: z .

- ▶ Vil finde "samtlige komplekse n 'te rødder af a ". En kompleks n 'te rod af a er et tal som opløftet til n 'te giver a .
- ▶ Formel. Rødderne i den binome ligning (1), hvor $a = re^{i\nu}$, $r \geq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, er givet ved

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\nu}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- ▶ **Bevis:** Sæt $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in \mathbb{R}$. Ved indsættelse i (1) fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{i\nu} \text{ og hermed } \rho^n e^{in\theta} = re^{i\nu}$$

De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = \nu + p2\pi$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Heraf følger formlen.

Den komplekse eksponentialfunktion

Definitionen

Egenskaber for exp

Polær form

Moirves formel

Den binome ligning

Den binome ligning, eksempler I

Den binome ligning, eksempler II

Den binome ligning, eksempler I

- ▶ Ligningen $z^5 = 32$. Vi bruger formlen. Da $32 = 32e^{i0}$ fås

$$z = \sqrt[5]{32} \exp \left(i \left(\frac{0}{5} + p \frac{2\pi}{5} \right) \right) = 2 \exp \left(ip \frac{2\pi}{5} \right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Rødderne er på polær form. Den rektangulære er ikke så køn.

Den binome ligning, eksempler I

- ▶ Ligningen $z^5 = 32$. Vi bruger formlen. Da $32 = 32e^{i0}$ fås

$$z = \sqrt[5]{32} \exp\left(i\left(\frac{0}{5} + p\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2 \exp\left(ip\frac{2\pi}{5}\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Rødderne er på polær form. Den rektangulære er ikke så køn.

- ▶ Rødderne ligger jævnt fordelt på en cirkel med radius 2.

Den binome ligning, eksempler I

- ▶ Ligningen $z^5 = 32$. Vi bruger formlen. Da $32 = 32e^{i0}$ fås

$$z = \sqrt[5]{32} \exp\left(i\left(\frac{0}{5} + p\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2 \exp\left(ip\frac{2\pi}{5}\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Rødderne er på polær form. Den rektangulære er ikke så køn.

- ▶ Rødderne ligger jævnt fordelt på en cirkel med radius 2.
- ▶ **Se Maple-illustration.**

Den binome ligning, eksempler I

- ▶ Ligningen $z^5 = 32$. Vi bruger formlen. Da $32 = 32e^{i0}$ fås

$$z = \sqrt[5]{32} \exp\left(i\left(\frac{0}{5} + p\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2 \exp\left(ip\frac{2\pi}{5}\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Rødderne er på polær form. Den rektangulære er ikke så køn.

- ▶ Rødderne ligger jævnt fordelt på en cirkel med radius 2.
- ▶ Se Maple-illustration.
- ▶ Ligningen $z^4 = 1 + i$. Da $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ fås

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[8]{2} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{16} + p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

hvor $0, 1, 2, 3$. Rødderne er jævnt fordelt på en cirkel med radius $\sqrt[8]{2}$.

Den binome ligning, eksempler I

- ▶ Ligningen $z^5 = 32$. Vi bruger formlen. Da $32 = 32e^{i0}$ fås

$$z = \sqrt[5]{32} \exp \left(i \left(\frac{0}{5} + p \frac{2\pi}{5} \right) \right) = 2 \exp \left(ip \frac{2\pi}{5} \right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Rødderne er på polær form. Den rektangulære er ikke så køn.

- ▶ Rødderne ligger jævnt fordelt på en cirkel med radius 2.
- ▶ Se Maple-illustration.
- ▶ Ligningen $z^4 = 1 + i$. Da $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ fås

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \exp \left(i \left(\frac{\pi}{4} + p \frac{2\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[8]{2} \exp \left(i \left(\frac{\pi}{16} + p \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

hvor $0, 1, 2, 3$. Rødderne er jævnt fordelt på en cirkel med radius $\sqrt[8]{2}$.

- ▶ **Se Maple-illustration.**

Den binome ligning, eksempler II

- Ligningen $z^3 = -125$. Vi bruger formlen. Da $-125 = 125e^{i\pi}$ fås

$$z = \sqrt[3]{125} \exp \left(i \left(\frac{\pi}{3} + p \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 5 \exp \left(i \left(\frac{\pi}{3} + p \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

hvor $p = 0, 1, 2$. Hermed har vi rødderne på polær form.

Den binome ligning, eksempler II

- ▶ Ligningen $z^3 = -125$. Vi bruger formlen. Da $-125 = 125e^{i\pi}$ fås

$$z = \sqrt[3]{125} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2$. Hermed har vi rødderne på polær form.

- ▶ Den rektangulære er for $p = 1$ simpelthen $z_1 = 5e^{i\pi} = -5$.

Den binome ligning, eksempler II

- ▶ Ligningen $z^3 = -125$. Vi bruger formlen. Da $-125 = 125e^{i\pi}$ fås

$$z = \sqrt[3]{125} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2$. Hermed har vi rødderne på polær form.

- ▶ Den rektangulære er for $p = 1$ simpelthen

$$z_1 = 5e^{i\pi} = -5.$$

- ▶ For $p = 0$ fås

$$z_0 = 5 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{3}.$$

Den binome ligning, eksempler II

- ▶ Ligningen $z^3 = -125$. Vi bruger formlen. Da $-125 = 125e^{i\pi}$ fås

$$z = \sqrt[3]{125} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2$. Hermed har vi rødderne på polær form.

- ▶ Den rektangulære er for $p = 1$ simpelthen

$$z_1 = 5e^{i\pi} = -5.$$

- ▶ For $p = 0$ fås

$$z_0 = 5 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{3}.$$

- ▶ For $p = 2$ fås $z_2 = 5 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$$5 \exp\left(i\frac{5\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\sqrt{3}.$$

Den binome ligning, eksempler II

- ▶ Ligningen $z^3 = -125$. Vi bruger formlen. Da $-125 = 125e^{i\pi}$ fås

$$z = \sqrt[3]{125} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 5 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + p\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2$. Hermed har vi rødderne på polær form.

- ▶ Den rektangulære er for $p = 1$ simpelthen

$$z_1 = 5e^{i\pi} = -5.$$

- ▶ For $p = 0$ fås

$$z_0 = 5 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{3}.$$

- ▶ For $p = 2$ fås $z_2 = 5 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + 2\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$$5 \exp\left(i\frac{5\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\sqrt{3}.$$

- ▶ Se Maple-illustration.