Homogene og inhomogene systemer Lineær uafhængighed

Preben Alsholm

21. februar 2008

Lineært ligningssystem

- Lineært ligningssystem

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Lineært ligningssystem

- Lineært ligningssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,

  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Lineært ligningssystem

- Lineært ligningssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,
  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
- Systemet kan nu skrives kompakt på formen $Ax = b$.

Homogent system $Ax = 0$

- Ligningssystemet $Ax = b$ kaldes homogent, hvis $b = 0$ (nulvektoren!).

Homogent system Ax = 0

- Ligningssystemet $Ax = b$ kaldes homogent, hvis $b = 0$ (nulvektoren!).
- Et homogent system har altid mindst én løsning, nemlig $x = 0$ (nulvektoren): Den trivielle løsning.

Homogent system $Ax = 0$

- Ligningssystemet $Ax = b$ kaldes homogent, hvis $b = 0$ (nulvektoren!).
- Et homogent system har altid mindst én løsning, nemlig $x = 0$ (nulvektoren): Den trivielle løsning.
- Ved reduktion af totalmatricen for $Ax = 0$ til echelonform optræder der kun to tilfælde:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & \# & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Homogent system $Ax = 0$

- Ligningssystemet $Ax = b$ kaldes homogent, hvis $b = 0$ (nulvektoren!).
- Et homogent system har altid mindst én løsning, nemlig $x = 0$ (nulvektoren): Den trivielle løsning.
- Ved reduktion af totalmatricen for $Ax = 0$ til echelonform optræder der kun to tilfælde:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & \# & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- I den første situation er præcis én løsning, nemlig den trivielle.

Homogent system $Ax = 0$

- Ligningssystemet $Ax = b$ kaldes homogent, hvis $b = 0$ (nulvektoren!).
- Et homogent system har altid mindst én løsning, nemlig $x = 0$ (nulvektoren): Den trivielle løsning.
- Ved reduktion af totalmatricen for $Ax = 0$ til echelonform optræder der kun to tilfælde:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & \# & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- I den første situation er præcis én løsning, nemlig den trivielle.
- I den anden situation er der uendeligt mange løsninger. I eksemplet er x_2 fri og x_1 og x_3 basale variable.

Homogent system $Ax = 0$

- Ligningssystemet $Ax = b$ kaldes homogent, hvis $b = 0$ (nulvektoren!).
- Et homogent system har altid mindst én løsning, nemlig $x = 0$ (nulvektoren): Den trivielle løsning.
- Ved reduktion af totalmatricen for $Ax = 0$ til echelonform optræder der kun to tilfælde:

$$\begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & \# & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \# & * & * & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- I den første situation er præcis én løsning, nemlig den trivielle.
- I den anden situation er der uendeligt mange løsninger. I eksemplet er x_2 fri og x_1 og x_3 basale variable.
- Maple: Eksempel 1 og 2.

Inhomogent system Ax = b

- *Theorem 6 Struktursætningen*. Den fuldstændige løsning til det inhomogene system $Ax = b$ kan skrives som summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $Ax = 0$.

Inhomogent system Ax = b

- *Theorem 6 Struktursætningen.* Den fuldstændige løsning til det inhomogene system $Ax = b$ kan skrives som summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $Ax = 0$.
- Forudsat selvfølgelig, at systemet $Ax = b$ overhovedet har en løsning!.

Inhomogent system Ax = b

- *Theorem 6 Struktursætningen*. Den fuldstændige løsning til det inhomogene system $Ax = b$ kan skrives som summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $Ax = 0$.
- Forudsat selvfølgelig, at systemet $Ax = b$ overhovedet har en løsning!.
- Bevis: Første del: Forskellen mellem to løsninger til den inhomogene ligning løser den homogene:

$$Ax = b \wedge Ay = b \Longrightarrow Ax - Ay = 0 \Longrightarrow A(x - y) = 0$$

Inhomogent system Ax = b

- *Theorem 6 Struktursætningen*. Den fuldstændige løsning til det inhomogene system $Ax = b$ kan skrives som summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $Ax = 0$.
- Forudsat selvfølgelig, at systemet $Ax = b$ overhovedet har en løsning!.
- Bevis: Første del: Forskellen mellem to løsninger til den inhomogene ligning løser den homogene:

$$Ax = b \wedge Ay = b \Longrightarrow Ax - Ay = 0 \Longrightarrow A(x - y) = 0$$

- Anden del: Summen af en løsning til den inhomogene og en løsning til den homogene løser den inhomogene:

$$Ax = b \wedge Az = 0 \Longrightarrow Ax + Az = b \Longrightarrow A(x + z) = b$$

Inhomogent system Ax = b

- *Theorem 6 Struktursætningen.* Den fuldstændige løsning til det inhomogene system $Ax = b$ kan skrives som summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $Ax = 0$.
- Forudsat selvfølgelig, at systemet $Ax = b$ overhovedet har en løsning!.
- Bevis: Første del: Forskellen mellem to løsninger til den inhomogene ligning løser den homogene:

$$Ax = b \wedge Ay = b \Longrightarrow Ax - Ay = 0 \Longrightarrow A(x - y) = 0$$

- Anden del: Summen af en løsning til den inhomogene og en løsning til den homogene løser den inhomogene:

$$Ax = b \wedge Az = 0 \Longrightarrow Ax + Az = b \Longrightarrow A(x + z) = b$$

- Maple: Eksempel 3 og 4.

Lineær uafhængighed I

- *Definition*. Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

Lineær uafhængighed I

- *Definition*. Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

- Med ord: Vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, hvis linearkombinationen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.

Lineær uafhængighed I

- *Definition*. Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

- Med ord: Vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, hvis linearkombinationen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.

Lineær uafhængighed I

- *Definition*. Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

- Med ord: Vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, hvis linearkombinationen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.
- Da vi pr. definition har, at $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix} x$

Lineær uafhængighed I

- *Definition*. Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

- Med ord: Vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, hvis linearkombinationen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.
- Da vi pr. definition har, at $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix} x$
- gælder der, at vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige netop når systemet $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix} x = 0$ kun har nulløsningen, $x = 0$.

Lineær uafhængighed I

- *Definition*. Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siges at være *lineært uafhængige* hvis

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

- Med ord: Vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, hvis linearkombinationen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p$ kun kan være nul, når alle koefficienterne er nul.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ikke er lineært uafhængige, siges de at være *lineært afhængige*.
- Da vi pr. definition har, at $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix} x$
- gælder der, at vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige netop når systemet $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix} x = 0$ kun har nulløsningen, $x = 0$.

- Maple: Eksempel 5 og 6.

Lineær uafhængighed II

- 2 vektorer er lineært uafhængige, hvis og kun hvis ingen af de to er et multiplum af den anden.

Lineær uafhængighed II

- 2 vektorer er lineært uafhængige, hvis og kun hvis ingen af de to er et multiplum af den anden.
- Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængig, hvis og kun hvis mindst én af dem kan skrives som en linearkombination af de øvrige.

Lineær uafhængighed II

- 2 vektorer er lineært uafhængige, hvis og kun hvis ingen af de to er et multiplum af den anden.
- Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængig, hvis og kun hvis mindst én af dem kan skrives som en linearkombination af de øvrige.
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$ og antag, at $p > n$. Så er $v_1, v_2, \ldots, v_p$ lineært afhængige.

Lineær uafhængighed II

- 2 vektorer er lineært uafhængige, hvis og kun hvis ingen af de to er et multiplum af den anden.
- Følgen af vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængig, hvis og kun hvis mindst én af dem kan skrives som en linearkombination af de øvrige.
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$ og antag, at $p > n$. Så er $v_1, v_2, \ldots, v_p$ lineært afhængige.
- Bevis: Systemet $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix} x = 0$ har flere ubekendte end ligninger, så der må være en fri variabel, og dermed en ikke-triviel løsning.