

# Matrixalgebra

Preben Alsholm

25. februar 2008

# Addition og multiplikation med skalar

- Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
AlgoritmenDen store sætning 8  
p. 145

# Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med  $A$  som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

## Matrixalgebra

### Addition og multiplikation med skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med  $A$  som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition:  $A + B = B + A$

## Matrixalgebra

### Addition og multiplikation med skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
AlgoritmenDen store sætning 8  
p. 145

# Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med  $A$  som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition:  $A + B = B + A$
- ▶ Den associative regel for addition:  
 $(A + B) + C = A + (B + C)$

## Matrixalgebra

### Addition og multiplikation med skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med  $A$  som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition:  $A + B = B + A$
- ▶ Den associative regel for addition:  
 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ▶ Regler for multiplikation med skalar:  $r(A + B) = rA + rB$ ,  $(r + s)A = rA + sA$ ,  $(rs)A = r(sA)$

## Matrixalgebra

### Addition og multiplikation med skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,

Algoritmen

Den store sætning 8

p. 145

# Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med  $A$  som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition:  $A + B = B + A$
- ▶ Den associative regel for addition:  
 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ▶ Regler for multiplikation med skalar:  $r(A + B) = rA + rB$ ,  $(r + s)A = rA + sA$ ,  $(rs)A = r(sA)$
- ▶ Maple.

# Matrixmultiplikation I

- ▶ Multiplikation af matricer:  $A$  er  $m \times n$  og  $B$  er  $n \times p$ :

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

**Matrixmultiplikation I**

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145



- ▶ Multiplikation af matricer:  $A$  er  $m \times n$  og  $B$  er  $n \times p$ :

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- ▶ Ækvivalent definition:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- ▶ Multiplikation af matricer:  $A$  er  $m \times n$  og  $B$  er  $n \times p$ :

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- ▶ Ækvivalent definition:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- ▶ Maple-illustration.

- ▶ Multiplikation af matricer:  $A$  er  $m \times n$  og  $B$  er  $n \times p$ :

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- ▶ Ækvivalent definition:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- ▶ Maple-illustration.
- ▶ Den associative regel for multiplikation:

$$(AB)C = A(BC)$$

- ▶ Multiplikation af matricer:  $A$  er  $m \times n$  og  $B$  er  $n \times p$ :

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- ▶ Ækvivalent definition:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- ▶ Maple-illustration.
- ▶ Den associative regel for multiplikation:

$$(AB) C = A (BC)$$

- ▶ De distributive regler:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$$

- ▶ Multiplikation af matricer:  $A$  er  $m \times n$  og  $B$  er  $n \times p$ :

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- ▶ Ækvivalent definition:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- ▶ Maple-illustration.
- ▶ Den associative regel for multiplikation:

$$(AB) C = A (BC)$$

- ▶ De distributive regler:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C) A = BA + CA$$

- ▶ Regning med skalar:  $r(AB) = (rA) B = A(rB)$

# Matrixmultiplikation II

- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

**Matrixmultiplikation II**

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Matrixmultiplikation II

- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet  $AB = BA$  mening?

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

**Matrixmultiplikation II**

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Matrixmultiplikation II

- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet  $AB = BA$  mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

**Matrixmultiplikation II**

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145



- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet  $AB = BA$  mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?
- ▶ **Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at  $AB \neq BA$ . Se Maple for eksempler.**

# Matrixmultiplikation II

- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet  $AB = BA$  mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?
- ▶ Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at  $AB \neq BA$ . Se Maple for eksempler.
- ▶ **Enhedsmatricen af størrelse  $n \times n$  betegnes med  $I_n$ :**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

**Matrixmultiplikation II**

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
AlgoritmenDen store sætning 8  
p. 145

# Matrixmultiplikation II

- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet  $AB = BA$  mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?
- ▶ Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at  $AB \neq BA$ . Se Maple for eksempler.
- ▶ Enhedsmatricen af størrelse  $n \times n$  betegnes med  $I_n$ :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Hvis  $A$  er  $m \times n$ , så gælder  $I_m A = A I_n = A$ .

# Matrixmultiplikation II

- ▶  $AB$  og  $BA$ . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet  $AB = BA$  mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?
- ▶ Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at  $AB \neq BA$ . Se Maple for eksempler.
- ▶ Enhedsmatricen af størrelse  $n \times n$  betegnes med  $I_n$ :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Hvis  $A$  er  $m \times n$ , så gælder  $I_m A = A I_n = A$ .
- ▶ Maple.

- Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

**Transponering**

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

- ▶ Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶  $(A^T)^T = A$

- ▶ Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶  $(A^T)^T = A$

- ▶  $(A + B)^T = A^T + B^T$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

**Transponering**

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

- ▶ Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶  $(A^T)^T = A$
- ▶  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶  $(AB)^T = B^T A^T$  Bemærk rækkefølgen!

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

**Transponering**

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
AlgoritmenDen store sætning 8  
p. 145



- ▶ Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶  $(A^T)^T = A$
- ▶  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶  $(AB)^T = B^T A^T$  Bemærk rækkefølgen!
- ▶  $(rA)^T = rA^T$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

**Transponering**

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
AlgoritmenDen store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix I

- *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

**Invers matrix I**

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

**Invers matrix I**

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

- ▶ Den inverse af  $A$  betegnes med  $A^{-1}$ . Andre betegnelser for *invertibel* er *regulær* og *ikke-singulær*.

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

- ▶ Den inverse af  $A$  betegnes med  $A^{-1}$ . Andre betegnelser for *invertibel* er *regulær* og *ikke-singulær*.
- ▶ **Formel for den inverse til en  $2 \times 2$ -matrix:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

# Invers matrix I

- ▶ *Definition.* En  $n \times n$ -matrix  $A$  siges at være invertibel, hvis der findes en  $n \times n$ -matrix  $C$ , så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes  $C$  en invers til  $A$ .

- ▶ Hvis kun  $AC = I$ , siger man, at  $A$  har en højreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis kun  $CA = I$ , siger man, at  $A$  har en venstreinvert  $C$ .
- ▶ Hvis  $A$  har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at  $AC_1 = I$  og  $C_2A = I$ . Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

- ▶ Den inverse af  $A$  betegnes med  $A^{-1}$ . Andre betegnelser for *invertibel* er *regulær* og *ikke-singulær*.
- ▶ Formel for den inverse til en  $2 \times 2$ -matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- ▶ Maple.



# Invers matrix II

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

**Invers matrix II**

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

**Invers matrix II**

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ **Bevis:**

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ Bevis:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ Bevis:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- ▶ Bevis:  $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ▶ Hvis  $A$  og  $B$  begge er invertible, så er  $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ▶ Bevis:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

- ▶ Hvis  $A$  er invertibel, så er  $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- ▶ Bevis:  $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$
- ▶ og  $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$ .

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  
 $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  
 $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145



# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ **Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \ | \ I]$ .**

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \mid I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

# Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \ | \ I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ De omvendte rækkeoperationer i omvendt rækkefølge vil føre os tilbage  $[I \ | \ C] \rightarrow [A \ | \ I]$ .

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

**Invers matrix III,  
Algoritmen**

Den store sætning 8  
p. 145

## Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \ | \ I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ De omvendte rækkeoperationer i omvendt rækkefølge vil føre os tilbage  $[I \ | \ C] \rightarrow [A \ | \ I]$ .
- ▶ - også selv om vi ombytter  $I$  og  $C$ :  $[C \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ A]$ .

## Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \ | \ I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ De omvendte rækkeoperationer i omvendt rækkefølge vil føre os tilbage  $[I \ | \ C] \rightarrow [A \ | \ I]$ .
- ▶ - også selv om vi ombytter  $I$  og  $C$ :  $[C \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ A]$ .
- ▶ Men så har  $CD = I$  løsningen  $D = A$ . Så  $CA = I$ .



## Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \ | \ I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ De omvendte rækkeoperationer i omvendt rækkefølge vil føre os tilbage  $[I \ | \ C] \rightarrow [A \ | \ I]$ .
- ▶ - også selv om vi ombytter  $I$  og  $C$ :  $[C \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ A]$ .
- ▶ Men så har  $CD = I$  løsningen  $D = A$ . Så  $CA = I$ .
- ▶ Dvs. hvis  $A$  har højreinvert  $C$ , så er  $C$  også venstreinvert, og dermed  $C = A^{-1}$ .

## Invers matrix III, Algoritmen

- ▶ Vi bestemmer  $C$ , så  $AC = I$ , dette kan skrives  $A [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Altså  $[Ac_1 \ Ac_2 \ \dots \ Ac_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ .
- ▶ Vi løser systemerne  $Ax = e_1, Ax = e_2, \dots, Ax = e_n$ .
- ▶ De  $n$  systemer har samme koefficientmatrix, men  $n$  forskellige højresider, der stillet sammen udgør  $I$ .
- ▶ Totalmatricen med alle højresiderne er dermed  $[A \ | \ I]$ .
- ▶ Hvis  $AC = I$  har en løsning  $C$ , så findes den ved Gauss-Jordan  $[A \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ C]$ .
- ▶ Hermed har vi fundet en højreinvert  $C$ .
- ▶ De omvendte rækkeoperationer i omvendt rækkefølge vil føre os tilbage  $[I \ | \ C] \rightarrow [A \ | \ I]$ .
- ▶ - også selv om vi ombytter  $I$  og  $C$ :  $[C \ | \ I] \rightarrow [I \ | \ A]$ .
- ▶ Men så har  $CD = I$  løsningen  $D = A$ . Så  $CA = I$ .
- ▶ Dvs. hvis  $A$  har højreinvert  $C$ , så er  $C$  også venstreinvert, og dermed  $C = A^{-1}$ .

▶ Maple.

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringsøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen  $Ax = 0$  har kun den trivielle løsning  $x = 0$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen  $Ax = 0$  har kun den trivielle løsning  $x = 0$
5. Søjlerne i  $A$  er lineært uafhængige

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen  $Ax = 0$  har kun den trivielle løsning  $x = 0$
5. Søjlerne i  $A$  er lineært uafhængige
6. Ligningen  $Ax = b$  har (mindst) en løsning for ethvert valg af  $b$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145



# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen  $Ax = 0$  har kun den trivielle løsning  $x = 0$
5. Søjlerne i  $A$  er lineært uafhængige
6. Ligningen  $Ax = b$  har (mindst) en løsning for ethvert valg af  $b$
7. Søjlerne i  $A$  udspænder  $R^n$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen  $Ax = 0$  har kun den trivielle løsning  $x = 0$
5. Søjlerne i  $A$  er lineært uafhængige
6. Ligningen  $Ax = b$  har (mindst) en løsning for ethvert valg af  $b$
7. Søjlerne i  $A$  udspænder  $R^n$
8. Matrixligningen  $CA = I$  har en løsning  $C$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,  
Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145

# Den store sætning 8 p. 145

Lad  $A$  være en  $n \times n$ -matrix. Følgende udsagn er da ækvivalente:

1.  $A$  er invertibel
2.  $A$  er rækkeækvivalent med enhedsmatricen
3.  $A$  har  $n$  pivoteringssøjler ("ingen dobbeltindrykninger i echelonformen")
4. Ligningen  $Ax = 0$  har kun den trivielle løsning  $x = 0$
5. Søjlerne i  $A$  er lineært uafhængige
6. Ligningen  $Ax = b$  har (mindst) en løsning for ethvert valg af  $b$
7. Søjlerne i  $A$  udspænder  $R^n$
8. Matrixligningen  $CA = I$  har en løsning  $C$
9. Matrixligningen  $AD = I$  har en løsning  $D$

## Matrixalgebra

Addition og  
multiplikation med  
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Transponering

Invers matrix I

Invers matrix II

Invers matrix III,

Algoritmen

Den store sætning 8  
p. 145