Underrum af R^n, Basis

Preben Alsholm

28. februar 2008

Underrum

- En delmængde U af R^n kaldes et underrum af R^n, hvis $U \neq \varnothing$ og hvis

$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$

Underrum

- En delmængde U af R^n kaldes et underrum af R^n, hvis $U \neq \emptyset$ og hvis

$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$

- R^n er et underrum af R^n. Et *trivielt* underrum.

Underrum

- En delmængde U af R^n kaldes et underrum af R^n, hvis $U \neq \emptyset$ og hvis

$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$

- R^n er et underrum af R^n. Et *trivielt* underrum.
- $\{0\}$ (hvor 0 er nulvektoren) er et underrum af R^n. Igen et *trivielt* underrum.

Underrum

- En delmængde U af R^n kaldes et underrum af R^n, hvis $U \neq \emptyset$ og hvis

$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$

- R^n er et underrum af R^n. Et *trivielt* underrum.
- $\{0\}$ (hvor 0 er nulvektoren) er et underrum af R^n. Igen et *trivielt* underrum.
- Med $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$ er $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ et underrum af R^n.

Underrum

- En delmængde U af R^n kaldes et underrum af R^n, hvis $U \neq \emptyset$ og hvis

$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$

- R^n er et underrum af R^n. Et *trivielt* underrum.
- $\{0\}$ (hvor 0 er nulvektoren) er et underrum af R^n. Igen et *trivielt* underrum.
- Med $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$ er $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ et underrum af R^n.
- Altså er følgende et underrum af R^4:

$$\left\{ t_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad t_1, t_2, t_3 \in R \right\}$$

Underrum

- En delmængde U af R^n kaldes et underrum af R^n, hvis $U \neq \emptyset$ og hvis
$$\begin{aligned} u, v &\in U \Longrightarrow u + v \in U \\ s &\in R \wedge u \in U \Longrightarrow su \in U \end{aligned}$$
- R^n er et underrum af R^n. Et *trivielt* underrum.
- $\{0\}$ (hvor 0 er nulvektoren) er et underrum af R^n. Igen et *trivielt* underrum.
- Med $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$ er $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ et underrum af R^n.
- Altså er følgende et underrum af R^4:
$$\left\{ t_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad t_1, t_2, t_3 \in R \right\}$$
- Delmængder af R^2, der ikke er underrum: Første kvadrant, højre halvplan.

Basis for underrum I

- En basis for et underrum U af R^n er en lineært uafhængig mængde $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ af vektorer, som udspænder U, altså $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.

Basis for underrum I

- En basis for et underrum U af R^n er en lineært uafhængig mængde $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ af vektorer, som udspænder U, altså $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.
- Hvis $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er en basis for underrummet U, så kan ethvert $u \in U$ skrives entydigt som en linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_p$:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$$

Basis for underrum I

- En basis for et underrum U af R^n er en lineært uafhængig mængde $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ af vektorer, som udspænder U, altså $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.
- Hvis $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er en basis for underrummet U, så kan ethvert $u \in U$ skrives entydigt som en linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_p$:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$$

- Standard basis i R^n, den kanoniske basis (her med $n = 4$):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for U.

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \dots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \dots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for U.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \dots, v_p$ er lineært afhængige, så kan vi blandt vektorerne udtage en basis for U:

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for U.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængige, så kan vi blandt vektorerne udtage en basis for U:
- Således: Dan matricen $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_p]$. Udfør Gauss-elimination til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af vektorerne $v_1\ v_2\ \ldots\ v_p$, der har disse numre, udgør da en basis for U.

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for U.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængige, så kan vi blandt vektorerne udtage en basis for U:
- Således: Dan matricen $[v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_p]$. Udfør Gauss-elimination til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af vektorerne $v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_p$, der har disse numre, udgør da en basis for U.
- Hvis nemlig pivoteringssøjlerne er nummer 1, 7 og 9, så er v_1, v_7, v_9 lineært uafhængige idet $[v_1 \; v_7 \; v_9]\, x = 0$ kun har nulløsningen,

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for U.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængige, så kan vi blandt vektorerne udtage en basis for U:
- Således: Dan matricen $[v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_p]$. Udfør Gauss-elimination til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af vektorerne $v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_p$, der har disse numre, udgør da en basis for U.
- Hvis nemlig pivoteringssøjlerne er nummer $1, 7$ og 9, så er v_1, v_7, v_9 lineært uafhængige idet $[v_1 \; v_7 \; v_9]\, x = 0$ kun har nulløsningen,
- og hvis b kan skrives som en linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_p$, så kan b også skrives som en linearkombination af kun v_1, v_7, v_9.

Basis for underrum II

- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_p$ være (tilfældige) vektorer i R^n. Vi ved, at $U = Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ er et underrum af R^n.
- Hvordan finder vi en basis for U?
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært uafhængige, så udgør de åbenbart allerede en basis for U.
- Hvis vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ er lineært afhængige, så kan vi blandt vektorerne udtage en basis for U:
- Således: Dan matricen $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_p \end{bmatrix}$. Udfør Gauss-elimination til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af vektorerne $v_1\ v_2\ \ldots\ v_p$, der har disse numre, udgør da en basis for U.
- Hvis nemlig pivoteringssøjlerne er nummer $1, 7$ og 9, så er v_1, v_7, v_9 lineært uafhængige idet $\begin{bmatrix} v_1 & v_7 & v_9 \end{bmatrix} x = 0$ kun har nulløsningen,
- og hvis b kan skrives som en linearkombination af $v_1, v_2, \ldots, v_p$, så kan b også skrives som en linearkombination af kun v_1, v_7, v_9.
- Maple.

Basis for søjlerum for matrix

- Lad $A = [v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_p]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Søjlerummet for A er $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. (Lay: $Col\,(A)$).

Basis for søjlerum for matrix

- Lad $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \dots, v_p$. Søjlerummet for A er $Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. (Lay: $Col\,(A)$).
- Ax er netop en linearkombination af søjlerne i A, så

$$Col\,(A) = \{Ax \,|\, x \in R^4\}$$

Basis for søjlerum for matrix

- Lad $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \dots, v_p$. Søjlerummet for A er $Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. (Lay: $Col\,(A)$).
- Ax er netop en linearkombination af søjlerne i A, så

$$Col\,(A) = \left\{ Ax \,\middle|\, x \in R^4 \right\}$$

- Ligningssystemet $Ax = b$ har altså en løsning for x netop når $b \in Col\,(A)$.

Basis for søjlerum for matrix

- Lad $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_p]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Søjlerummet for A er $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. (Lay: $Col(A)$).
- Ax er netop en linearkombination af søjlerne i A, så

$$Col(A) = \{Ax \mid x \in R^4\}$$

- Ligningssystemet $Ax = b$ har altså en løsning for x netop når $b \in Col(A)$.
- En basis for søjlerummet findes åbenbart som beskrevet på foregående side:

Basis for søjlerum for matrix

- Lad $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \dots, v_p$. Søjlerummet for A er $Span\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. (Lay: $Col(A)$).
- Ax er netop en linearkombination af søjlerne i A, så
$$Col(A) = \{Ax \,|\, x \in R^4\}$$
- Ligningssystemet $Ax = b$ har altså en løsning for x netop når $b \in Col(A)$.
- En basis for søjlerummet findes åbenbart som beskrevet på foregående side:
- Udfør Gauss-elimination på A til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af de *oprindelige* søjler, der har disse numre, udgør da en basis for $Col(A)$.

Basis for søjlerum for matrix

- Lad $A = [v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_p]$ være en matrix, hvis søjler er $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Søjlerummet for A er $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. (Lay: $Col\,(A)$).
- Ax er netop en linearkombination af søjlerne i A, så
$$Col\,(A) = \{Ax \,|\, x \in R^4\}$$
- Ligningssystemet $Ax = b$ har altså en løsning for x netop når $b \in Col\,(A)$.
- En basis for søjlerummet findes åbenbart som beskrevet på foregående side:
- Udfør Gauss-elimination på A til echelonform. Find numrene på pivoteringssøjlerne. De af de *oprindelige* søjler, der har disse numre, udgør da en basis for $Col\,(A)$.
- En anden basis for $Col\,(A)$ kan findes ved Gauss-elimination på A^T. Rækkerne i echelonformen for A^T udgør nu en basis for $Col\,(A)$. Rækkerne bør selvfølgelig skrives som søjler i svaret.

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A $(Nul\,(A))$ er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A ($Nul\,(A)$) er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A ($Nul\,(A)$) er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.
- Ved løsningen af $Ax = 0$ er der to tilfælde:

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A ($Nul\,(A)$) er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.
- Ved løsningen af $Ax = 0$ er der to tilfælde:
- Enten er kun nulvektoren løsning. Så er $Nul\,(A) = \{0\}$.

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A ($Nul\,(A)$) er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.
- Ved løsningen af $Ax = 0$ er der to tilfælde:
- Enten er kun nulvektoren løsning. Så er $Nul\,(A) = \{0\}$.
- Eller der er uendeligt mange løsninger, i hvis beskrivelse indgår et antal frie parametre:

$$x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_p v_p$$

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A ($Nul\,(A)$) er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.
- Ved løsningen af $Ax = 0$ er der to tilfælde:
- Enten er kun nulvektoren løsning. Så er $Nul\,(A) = \{0\}$.
- Eller der er uendeligt mange løsninger, i hvis beskrivelse indgår et antal frie parametre:

$$x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_p v_p$$

- Ved brug af den sædvanlige algoritme, vil vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ automatisk være lineært uafhængige og derfor udgøre en basis for $Nul\,(A)$.

Basis for nulrum for matrix

- Nulrummet for matricen A $(Nul\,(A))$ er mængden af løsninger til det homogene system $Ax = 0$.
- En basis for $Nul\,(A)$ findes ved at løse det homogene system $Ax = 0$ på sædvanlig måde ved Gauss-elimination.
- Ved løsningen af $Ax = 0$ er der to tilfælde:
- Enten er kun nulvektoren løsning. Så er $Nul\,(A) = \{0\}$.
- Eller der er uendeligt mange løsninger, i hvis beskrivelse indgår et antal frie parametre:

$$x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_p v_p$$

- Ved brug af den sædvanlige algoritme, vil vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_p$ automatisk være lineært uafhængige og derfor udgøre en basis for $Nul\,(A)$.
- Maple.

Dimension af underrum

- Hvis vektorerne $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ og $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ begge er baser for underrummet U, så er $k = p$.

Dimension af underrum

- Hvis vektorerne $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ og $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ begge er baser for underrummet U, så er $k = p$.
- Antallet af vektorer i en basis for et underrum U kaldes underrummets dimension, der betegnes $\dim U$.

Dimension af underrum

- Hvis vektorerne $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ og $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ begge er baser for underrummet U, så er $k = p$.
- Antallet af vektorer i en basis for et underrum U kaldes underrummets dimension, der betegnes $\dim U$.
- Dimensionen af nulrummet for en matrix A er antallet af frie variable ved løsning af $Ax = 0$.

Dimension af underrum

- Hvis vektorerne $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ og $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ begge er baser for underrummet U, så er $k = p$.
- Antallet af vektorer i en basis for et underrum U kaldes underrummets dimension, der betegnes $\dim U$.
- Dimensionen af nulrummet for en matrix A er antallet af frie variable ved løsning af $Ax = 0$.
- Dimensionen af søjlerummet for en matrix A er antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af A til echelonform.

Dimension af underrum

- Hvis vektorerne $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ og $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ begge er baser for underrummet U, så er $k = p$.
- Antallet af vektorer i en basis for et underrum U kaldes underrummets dimension, der betegnes $\dim U$.
- Dimensionen af nulrummet for en matrix A er antallet af frie variable ved løsning af $Ax = 0$.
- Dimensionen af søjlerummet for en matrix A er antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af A til echelonform.
- Hvis A er en $m \times n$ matrix, så gælder åbenbart:

$$\dim Col\,(A) + \dim Nul\,(A) = n$$

Rang af matrix

- *Rangen* af A er dimensionen af søjlerummet, altså antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af A til echelonform.

Rang af matrix

- *Rangen* af A er dimensionen af søjlerummet, altså antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af A til echelonform.
- Vi kan derfor også skrive

$$rank\,(A) + \dim Nul\,(A) = n$$

Rang af matrix

- *Rangen* af A er dimensionen af søjlerummet, altså antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af A til echelonform.
- Vi kan derfor også skrive

$$\mathit{rank}\,(A) + \dim \mathit{Nul}\,(A) = n$$

- Rangen af A er lig med antal fra nulrækken forskellige rækker i en echelonform for A.

Rang af matrix

- *Rangen* af A er dimensionen af søjlerummet, altså antallet af pivoteringssøjler ved Gauss-elimination af A til echelonform.
- Vi kan derfor også skrive

$$rank\,(A) + \dim Nul\,(A) = n$$

- Rangen af A er lig med antal fra nulrækken forskellige rækker i en echelonform for A.
- Rangen af A^T er lig rangen af A. (jvf. den alternative måde at finde en basis for $Col\,(A)$).