Determinanter

Preben Alsholm

3. marts 2008

Definition af determinant I

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definition af determinant I

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$-matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A.

Definition af determinant I

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$-matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A.
- Determinanten af A defineres nu (i Lay's bog) således

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

Definition af determinant I

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$-matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A.
- Determinanten af A defineres nu (i Lay's bog) således

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

- hvor (i, j)-komplementet til A (engelsk *cofactor*) C_{ij} er defineret ved $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant II

- Med definitionen
  $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$

Definition af determinant II

- Med definitionen
  $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$
- hvor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, bliver determinanten i Lay defineret ved *udvikling i komplementer langs første række*.

Definition af determinant II

- Med definitionen
  $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$
- hvor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, bliver determinanten i Lay defineret ved *udvikling i komplementer langs første række*.
- Definitionen er *rekursiv* i den forstand, at $\det A$ bliver defineret ud fra $\det A_{1j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definition af determinant II

- Med definitionen
  $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$
- hvor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, bliver determinanten i Lay defineret ved *udvikling i komplementer langs første række*.
- Definitionen er *rekursiv* i den forstand, at $\det A$ bliver defineret ud fra $\det A_{1j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.
- For at fuldstændiggøre definitionen må vi tilføje, at determinanten af en 1×1-matrix (et tal) er tallet selv.

Definition af determinant II

- Med definitionen
  $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$
- hvor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, bliver determinanten i Lay defineret ved *udvikling i komplementer langs første række*.
- Definitionen er *rekursiv* i den forstand, at $\det A$ bliver defineret ud fra $\det A_{1j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.
- For at fuldstændiggøre definitionen må vi tilføje, at determinanten af en 1×1-matrix (et tal) er tallet selv.
- Determinanten af en 2×2-matrix A findes ved udvikling langs første række til

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

Definition af determinant II

- Med definitionen
  $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$
- hvor $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$, bliver determinanten i Lay defineret ved *udvikling i komplementer langs første række*.
- Definitionen er *rekursiv* i den forstand, at $\det A$ bliver defineret ud fra $\det A_{1j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.
- For at fuldstændiggøre definitionen må vi tilføje, at determinanten af en 1×1-matrix (et tal) er tallet selv.
- Determinanten af en 2×2-matrix A findes ved udvikling langs første række til

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

- Heldigvis det vi kender fra gymnasiet.

Definition af determinant III

- Udvikling langs første række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 0 + (-5)\cdot(-6) = 34.$$

Definition af determinant III

- Udvikling langs første række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-5)\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-6) = 34.$$

- Sætning 1 (p.204). For ethvert i og j gælder:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

Definition af determinant III

- Udvikling langs første række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-5)\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 0 + (-5)\cdot(-6) = 34.$$

- Sætning 1 (p.204). For ethvert i og j gælder:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

- Udvikling i komplementer langs 3. række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 34 + 0 = 34.$$

Definition af determinant III

- Udvikling langs første række:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 0 + (-5)\cdot(-6) = 34.$$
- Sætning 1 (p.204). For ethvert i og j gælder:
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$
- Udvikling i komplementer langs 3. række:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 34 + 0 = 34.$$
- Maple-illustrationer af definitionen og Sætning 1.

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.

- Ved udvikling langs første søjle fås

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.
- Ved udvikling langs første søjle fås

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Gentagen udvikling langs 1. søjle giver $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_2 := R_2 - 3R_1$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -14 & 17 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_2 := R_2 - 3R_1$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -14 & 17 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Udvikling langs 1. søjle giver videre

$$D = 2 \begin{vmatrix} -14 & 17 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 34$$

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_2 := R_2 - 3R_1$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -14 & 17 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Udvikling langs 1. søjle giver videre

$$D = 2 \begin{vmatrix} -14 & 17 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 34$$

- Maple-illustrationer.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det\left(A^T\right) = \det A$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det \left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det (AB) = \det (A) \det (B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\, C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\,C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot \mathit{produkt\_pivot\_elementer}$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$

Sætninger om determinanten

- Sætning 4 (p.210) A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er invertibel, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 5 (p.212) $\det \left(A^T\right) = \det A$.
- Sætning 6 (p.212) $\det (AB) = \det (A) \det (B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\, C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det (AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar. $\det \left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$
- Maple.

Cramers regel I

- Cramers sætning (sætning 7, p.217). Lad $A_i(b) = [a_1\ a_2\ \ldots\ b\ \ldots a_n]$. Antag $\det(A) \neq 0$. Så gælder, at løsningen til $Ax = b$ er givet ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$

Cramers regel I

- Cramers sætning (sætning 7, p.217). Lad $A_i(b) = [a_1\ a_2\ \dots\ b\ \dots a_n]$. Antag $\det(A) \neq 0$. Så gælder, at løsningen til $Ax = b$ er givet ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$

- Bevis: Hvis $Ax = b$ fås

$$\begin{aligned} A\, I_i(x) &= A[e_1\ e_2\ \dots\ x\ \dots\ e_n] = [Ae_1\ Ae_2\ \dots\ Ax\ \dots\ Ae_n] \\ &= [a_1\ a_2\ \dots\ b\ \dots\ a_n] = A_i(b) \end{aligned}$$

Cramers regel I

- Cramers sætning (sætning 7, p.217). Lad $A_i(b) = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ b \ \ldots a_n]$. Antag $\det(A) \neq 0$. Så gælder, at løsningen til $Ax = b$ er givet ved
$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$
- Bevis: Hvis $Ax = b$ fås
$$\begin{aligned} A\, I_i(x) &= A[e_1 \ e_2 \ \ldots \ x \ \ldots \ e_n] = [Ae_1 \ Ae_2 \ \ldots \ Ax \ \ldots \ Ae_n] \\ &= [a_1 \ a_2 \ \ldots \ b \ \ldots \ a_n] = A_i(b) \end{aligned}$$
- Så
$$\det(A_i(b)) = \det(A\, I_i(x)) = \det(A)\det(I_i(x)) = \det(A)\, x_i$$

Cramers regel I

- Cramers sætning (sætning 7, p.217). Lad $A_i(b) = [a_1\ a_2\ \ldots\ b\ \ldots a_n]$. Antag $\det(A) \neq 0$. Så gælder, at løsningen til $Ax = b$ er givet ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$

- Bevis: Hvis $Ax = b$ fås

$$\begin{aligned} A\, I_i(x) &= A[e_1\ e_2\ \ldots\ x\ \ldots\ e_n] = [Ae_1\ Ae_2\ \ldots\ Ax\ \ldots\ Ae_n] \\ &= [a_1\ a_2\ \ldots\ b\ \ldots\ a_n] = A_i(b) \end{aligned}$$

- Så

$$\det(A_i(b)) = \det(A\, I_i(x)) = \det(A)\det(I_i(x)) = \det(A)\, x_i$$

- Af Cramers regel følger:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

hvor C er matricen af komplementer C_{ij} til A.

Cramers regel II

- Cramers regel og formlen for den inverse har deres anvendelser, men kan ikke anbefales i øvrigt.

Cramers regel II

- Cramers regel og formlen for den inverse har deres anvendelser, men kan ikke anbefales i øvrigt.
- Eksempel. Find x_2, når $Ax = b$ og

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cramers regel II

- Cramers regel og formlen for den inverse har deres anvendelser, men kan ikke anbefales i øvrigt.
- Eksempel. Find x_2, når $Ax = b$ og

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Vi har

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = -4$$

Cramers regel II

- Cramers regel og formlen for den inverse har deres anvendelser, men kan ikke anbefales i øvrigt.
- Eksempel. Find x_2, når $Ax = b$ og

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Vi har

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = -4$$

- Maple.