Egenværdier og Egenvektorer

Preben Alsholm

6. marts 2008

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.
- Eksempel 1. v er egenvektor for matricen A, hvor

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.
- Eksempel 1. v er egenvektor for matricen A, hvor

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Vi beviser påstanden og finder den tilhørende egenværdi.

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.
- Eksempel 1. v er egenvektor for matricen A, hvor

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Vi beviser påstanden og finder den tilhørende egenværdi.
- Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5v$$

Definition og Eksempel 1

- Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egenværdi* for A, hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

- En vektor v, der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egenværdien λ.
- Eksempel 1. v er egenvektor for matricen A, hvor

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Vi beviser påstanden og finder den tilhørende egenværdi.
- Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5v$$

- Altså er v egenvektor for A med tilhørende egenværdi 5.

Eksempel 2

- Påstand: Tallet -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2

- Påstand: Tallet -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

- Vi skal vise, at $Av = -2v$ har en løsning $v \neq 0$. Altså vise, at $(A - (-2)\, I)\, v = 0$ har en ikke-triviel løsning v.

Eksempel 2

- Påstand: Tallet -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

- Vi skal vise, at $Av = -2v$ har en løsning $v \neq 0$. Altså vise, at $(A - (-2)\, I)\, v = 0$ har en ikke-triviel løsning v.
- Totalmatricen for systemet $(A + 2I)\, v = 0$ er

$$\begin{bmatrix} -5+2 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -5+2 & 3 & 0 \\ -9 & -9 & 7+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -9 & -9 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2

- Påstand: Tallet -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

- Vi skal vise, at $Av = -2v$ har en løsning $v \neq 0$. Altså vise, at $(A - (-2)I)v = 0$ har en ikke-triviel løsning v.
- Totalmatricen for systemet $(A + 2I)v = 0$ er

$$\begin{bmatrix} -5+2 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -5+2 & 3 & 0 \\ -9 & -9 & 7+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -9 & -9 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

- Operationerne $R_2 := R_2 - R_1, R_3 := R_3 - 3R_1$ giver

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ så $-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$, hvor x_2 og x_3 er frie.

Eksempel 2 fortsat

- Egenvektorerne for A hørende til egenværdien -2:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor x_2 og x_3 er frie.

Eksempel 2 fortsat

- Egenvektorerne for A hørende til egenværdien -2:
$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
hvor x_2 og x_3 er frie.
- *Egenrummet* hørende til λ er $Nul\,(A - \lambda I)$. Vi ser hér, at $\dim\,(Nul\,(A - (-2)\,I)) = 2$.

Eksempel 2 fortsat

- Egenvektorerne for A hørende til egenværdien -2:
$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
hvor x_2 og x_3 er frie.
- *Egenrummet* hørende til λ er $Nul\,(A - \lambda I)$. Vi ser hér, at $\dim\,(Nul\,(A - (-2)\,I)) = 2$.
- Hvis vi ikke på forhånd vidste, at -2 er egenværdi for matricen
$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$
kunne vi have gjort som følger:

Eksempel 2 fortsat

- Egenvektorerne for A hørende til egenværdien -2:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  hvor x_2 og x_3 er frie.
- *Egenrummet* hørende til λ er $Nul\left(A - \lambda I\right)$. Vi ser hér, at $\dim\left(Nul\left(A - \left(-2\right) I\right)\right) = 2$.
- Hvis vi ikke på forhånd vidste, at -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

  kunne vi have gjort som følger:
- Vi skal bestemme λ, så $Av = \lambda v$, altså $\left(A - \lambda I\right) v = 0$, har en ikke-triviel løsning v.

Eksempel 2 fortsat

- Egenvektorerne for A hørende til egenværdien -2:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  hvor x_2 og x_3 er frie.
- *Egenrummet* hørende til λ er $Nul\,(A - \lambda I)$. Vi ser hér, at $\dim\left(Nul\,(A - (-2)\,I)\right) = 2$.
- Hvis vi ikke på forhånd vidste, at -2 er egenværdi for matricen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

  kunne vi have gjort som følger:
- Vi skal bestemme λ, så $Av = \lambda v$, altså $(A - \lambda I)\,v = 0$, har en ikke-triviel løsning v.
- Dette er tilfældet, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ ikke er invertibel.

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså løsningerne til $\det(A - \lambda I) = 0$.

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså løsningerne til $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Egenværdierne er rødderne i *karakterpolynomiet* $\det(A - \lambda I)$.

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså løsningerne til $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Egenværdierne er rødderne i *karakterpolynomiet* $\det(A - \lambda I)$.
- I dette tilfælde er karakterpolynomiet

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2\end{aligned}$$

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså løsningerne til $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Egenværdierne er rødderne i *karakterpolynomiet* $\det(A - \lambda I)$.
- I dette tilfælde er karakterpolynomiet

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \end{aligned}$$

- Så foruden egenværdien -2 har A også egenværdien 1.

Eksempel 2 fortsat (2)

- Hvordan bestemmer vi λ, så $A - \lambda I$ ikke er invertibel?
- Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- Egenværdierne for A er altså løsningerne til $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Egenværdierne er rødderne i *karakterpolynomiet* $\det(A - \lambda I)$.
- I dette tilfælde er karakterpolynomiet

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2\end{aligned}$$

- Så foruden egenværdien -2 har A også egenværdien 1.
- Egenvektorerne hørende til egenværdien 1 bestemmes i Maple-worksheet.

Lineær uafhængighed af egenvektorer I

- Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lineært uafhængige.

Lineær uafhængighed af egenvektorer I

- Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lineært uafhængige.
- Bevis: Tag først $r = 2$. Antag

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{2}$$

Lineær uafhængighed af egenvektorer I

- Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lineært uafhængige.
- Bevis: Tag først $r = 2$. Antag

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{2}$$

- Ved multiplikation med A fra venstre fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = 0$, altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{3}$$

Lineær uafhængighed af egenvektorer I

- Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lineært uafhængige.
- Bevis: Tag først $r = 2$. Antag

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{2}$$

- Ved multiplikation med A fra venstre fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = 0$, altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{3}$$

- Men vi har også af (2) at

$$c_1 \lambda_2 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{4}$$

Lineær uafhængighed af egenvektorer I

- Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lineært uafhængige.
- Bevis: Tag først $r = 2$. Antag

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{2}$$

- Ved multiplikation med A fra venstre fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = 0$, altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{3}$$

- Men vi har også af (2) at

$$c_1 \lambda_2 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0 \tag{4}$$

- (3) minus (4) giver $c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 = 0$, så $c_1 = 0$. Af (2) fås $c_2 = 0$.

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.
- Ved multiplikation med A fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 = 0$ altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.
- Ved multiplikation med A fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 = 0$ altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Men vi har også

$$c_1 \lambda_3 v_1 + c_2 \lambda_3 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.
- Ved multiplikation med A fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 = 0$ altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Men vi har også

$$c_1 \lambda_3 v_1 + c_2 \lambda_3 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Ved subtraktion fås

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_3) v_2 = 0$$

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.
- Ved multiplikation med A fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 = 0$ altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Men vi har også

$$c_1 \lambda_3 v_1 + c_2 \lambda_3 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Ved subtraktion fås

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_3) v_2 = 0$$

- Af resultatet for $r = 2$ følger, at $c_1 = c_2 = 0$ og derfor, at $c_3 = 0$.

Lineær uafhængighed af egenvektorer II

- Dernæst $r = 3$. Antag $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$.
- Ved multiplikation med A fås $c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3 = 0$ altså

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Men vi har også

$$c_1 \lambda_3 v_1 + c_2 \lambda_3 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3 = 0$$

- Ved subtraktion fås

$$c_1 \left(\lambda_1 - \lambda_3\right) v_1 + c_2 \left(\lambda_2 - \lambda_3\right) v_2 = 0$$

- Af resultatet for $r = 2$ følger, at $c_1 = c_2 = 0$ og derfor, at $c_3 = 0$.
- Således kan fortsættes for $r = 4$ osv.

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B, hvis der eksisterer en invertibel matrix P, så $P^{-1}AP = B$.

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B, hvis der eksisterer en invertibel matrix P, så $P^{-1}AP = B$.
- Hvis A er similær med B, så er B similær med A.

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B, hvis der eksisterer en invertibel matrix P, så $P^{-1}AP = B$.
- Hvis A er similær med B, så er B similær med A.
- A similær med B og B similær med C medfører A similær med C:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \wedge Q^{-1}BQ = C \Longrightarrow C = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \end{aligned}$$

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B, hvis der eksisterer en invertibel matrix P, så $P^{-1}AP = B$.
- Hvis A er similær med B, så er B similær med A.
- A similær med B og B similær med C medfører A similær med C:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \wedge Q^{-1}BQ = C \Longrightarrow C = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \end{aligned}$$

- Hvis A og B er similære, så har de samme karakterpolynomium.

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B, hvis der eksisterer en invertibel matrix P, så $P^{-1}AP = B$.
- Hvis A er similær med B, så er B similær med A.
- A similær med B og B similær med C medfører A similær med C:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \wedge Q^{-1}BQ = C \Longrightarrow C = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \end{aligned}$$

- Hvis A og B er similære, så har de samme karakterpolynomium.
- Er nemlig $B = P^{-1}AP$, så fås

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

Similære matricer

- Matricen A siges at være *similær* med matricen B, hvis der eksisterer en invertibel matrix P, så $P^{-1}AP = B$.
- Hvis A er similær med B, så er B similær med A.
- A similær med B og B similær med C medfører A similær med C:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \wedge Q^{-1}BQ = C \Longrightarrow C = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \end{aligned}$$

- Hvis A og B er similære, så har de samme karakterpolynomium.
- Er nemlig $B = P^{-1}AP$, så fås

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

- Men så har vi $\det(B - \lambda I) = \det\left(P^{-1}(A - \lambda I)P\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(A - \lambda I)\det P = \det(A - \lambda I)$.