

Omvendte trigonometriske funktioner

Hyperbolske funktioner

Preben Alsholm

13. marts 2008

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt

arcsin I

arcsin II

arccos I

arccos II

arctan I

arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh

tanh, arsinh, arcosh,
artanh

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved

$$f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$$

dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved

$$f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$$

dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.

- Lad f være enentydig. Vi har for alle x :
 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ og $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved

$$f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$$

dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.

- Lad f være enentydig. Vi har for alle x :
 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ og $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
- Hvis f er differentiabel i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Omvendt funktion generelt

- Funktionen f kaldes enentydig (1-1), hvis for alle x_1, x_2 :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Lad f være enentydig. Den omvendte funktion f^{-1} til f er givet ved

$$f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$$

dvs. f^{-1} omgør, hvad f gør.

- Lad f være enentydig. Vi har for alle x :
 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ og $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
- Hvis f er differentiabel i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Maple: arcsin, arccos og arctan, men se også nedenfor.

arcsin I

- Betragt restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

arcsin I

- Betragt restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt

arcsin I

arcsin II

arccos I

arccos II

arctan I

arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh

tanh, arsinh, arcosh,
artanh

arcsin I

- Betragt restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- **arcsin omgør, hvad Sin gør:**

$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \iff \sin(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

arcsin I

- Betratg restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:

$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \iff \text{Sin}(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.

arcsin I

- Betratg restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:

$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \iff \sin(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.
- arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$ da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.**

arcsin I

- Betratg restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:

$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \iff \sin(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\arcsin 0 = 0$ da $\sin(0) = 0$ og $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

arcsin I

- Betratg restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:

$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \iff \sin(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin 0 = 0$ da $\sin(0) = 0$ og $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ da $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

arcsin I

- Betratg restriktionen af sinusfunktionen til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lad os kalde den Sin. Vi har altså

$$\text{Sin}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- Sin er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcussinus og betegnes med arcsin.
- arcsin omgør, hvad Sin gør:

$$\begin{aligned} \arcsin(a) &= b \iff \sin(b) = a \\ &\iff \sin(b) = a \wedge b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arcsin er værdimængden for Sin, altså $[-1, 1]$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin 0 = 0$ da $\sin(0) = 0$ og $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ da $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2})) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

arcsin II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

- $\sin(\arcsin x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt

arcsin I

arcsin II

arccos I

arccos II

arctan I

arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh

tanh, arsinh, arcosh,
artanh

arcsin II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- $\sin(\arcsin x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- $\arcsin(\sin x) = x$ for alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
[arcsin I](#)
arcsin II
[arccos I](#)
[arccos II](#)
[arctan I](#)
[arctan II](#)

Hyperbolske
funktioner

[sinh og cosh](#)
[tanh, arsinh, arcosh,](#)
[artanh](#)

arcsin II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

- $\sin(\arcsin x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- $\arcsin(\sin x) = x$ for alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- **arcsin er differentiabel i ethvert $x \in]-1, 1[$ med**

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

arcsin II

- $\sin(\arcsin x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- $\arcsin(\sin x) = x$ for alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- \arcsin er differentiabel i ethvert $x \in]-1, 1[$ med

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og lad $f = \sin$ i den generelle sætning om differentierbaritet. $f'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \sin x_0$, så gælder

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \\ \frac{1}{\pm\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \end{aligned}$$

arccos I

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Betragt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt

arcsin I

arcsin II

arccos I

arccos II

arctan I

arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh

tanh, arsinh, arcosh,
artanh

arccos I

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Betragt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
[arcsin I](#)
[arcsin II](#)
arccos I
[arccos II](#)
[arctan I](#)
[arctan II](#)

Hyperbolske
funktioner

[sinh og cosh](#)
[tanh, arsinh, arcosh,](#)
[artanh](#)

arccos I

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Betragt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \text{arccos}(a) = b &\iff \text{Cos}(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
[arcsin I](#)
[arcsin II](#)
arccos I
[arccos II](#)
[arctan I](#)
[arctan II](#)

Hyperbolske
funktioner

[sinh og cosh](#)
[tanh, arsinh, arcosh,](#)
[artanh](#)

arccos I

- Betragt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) &= b \iff \text{Cos}(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- **Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1, 1]$.**

arccos I

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Betrat restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) &= b \iff \cos(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1, 1]$.
- arccos 1 = 0 da $\cos 0 = 1$ og $0 \in [0, \pi]$.**

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
[arcsin I](#)
[arcsin II](#)
[arccos I](#)
[arccos II](#)
[arctan I](#)
[arctan II](#)

Hyperbolske
funktioner

[sinh og cosh](#)
[tanh, arsinh, arcosh,](#)
[artanh](#)

arccos I

- Betrat restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) &= b \iff \cos(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1, 1]$.
- $\arccos 1 = 0$ da $\cos 0 = 1$ og $0 \in [0, \pi]$.
- arccos 0 = $\frac{\pi}{2}$** da $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

arccos I

Arcusfunktioner,
hyperboliske
funktioner

Preben Alsholm

- Betrægt restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) &= b \iff \cos(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1, 1]$.
- $\arccos 1 = 0$ da $\cos 0 = 1$ og $0 \in [0, \pi]$.
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.
- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
[arcsin I](#)
[arcsin II](#)
[arccos I](#)
[arccos II](#)
[arctan I](#)
[arctan II](#)

Hyperboliske
funktioner

[sinh og cosh](#)
[tanh, arsinh, arcosh,](#)
[artanh](#)

arccos I

- Betrat restriktionen af cosinusfunktionen til $[0, \pi]$.

Lad os kalde den Cos. Vi har altså

$$\text{Cos}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } x \in [0, \pi] \\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

- Cos er aftagende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcuscosinus og betegnes med arccos.
- arccos omgør, hvad Cos gør:

$$\begin{aligned} \arccos(a) &= b \iff \cos(b) = a \\ &\iff \cos(b) = a \wedge b \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arccos er værdimængden for Cos, altså $[-1, 1]$.
- $\arccos 1 = 0$ da $\cos 0 = 1$ og $0 \in [0, \pi]$.
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.
- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ da $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ og $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

arccos II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

- $\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

arccos II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- ▶ $\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- ▶ $\arccos(\cos x) = x$ for alle $x \in [0, \pi]$.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

arccos II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

- ▶ $\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- ▶ $\arccos(\cos x) = x$ for alle $x \in [0, \pi]$.
- ▶ **arccos er differentierbar i ethvert $x \in]-1, -1[$ med**

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

arccos II

- $\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$.
- $\arccos(\cos x) = x$ for alle $x \in [0, \pi]$.
- arccos er differentiabel i ethvert $x \in]-1, -1[$ med

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]0, \pi[$ og lad $f = \cos$ i den generelle sætning om differentierbarlighed. $f'(x_0) = -\sin x_0 \neq 0$. Sæt $y_0 = f(x_0) = \cos x_0$, så gælder

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{-\sin x_0} = \\ \frac{1}{\pm\sqrt{1-(\cos x_0)^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x_0)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \end{aligned}$$

arctan I

► Betragt restriktionen af tangensfunktionen til $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt

arcsin I

arcsin II

arccos I

arccos II

arctan I

arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh

tanh, arsinh, arcosh,

artanh

arctan I

- Betragt restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.

arctan I

- Betratg restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \tan(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

arctan I

- Betrat restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \text{Tan}(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arctan er værdimængden for Tan, altså R .

arctan I

- Betrat restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \text{Tan}(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

- Definitionsmaengden for arctan er værdimængden for Tan, altså R .
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ og $\frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

arctan I

- Betrat restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \text{Tan}(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arctan er værdimængden for Tan, altså R .
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ og $\frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- $\arctan 0 = 0$ da $\tan 0 = 0$ og $0 \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

arctan I

- Betrat restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \text{Tan}(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arctan er værdimængden for Tan, altså R .
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ og $\frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- $\arctan 0 = 0$ da $\tan 0 = 0$ og $0 \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ da $\tan \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$ og $\frac{\pi}{3} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

arctan I

- Betrat restriktionen af tangensfunktionen til $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Lad os kalde den Tan. Vi har altså

$$\text{Tan}(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \text{ikke defineret} & \text{for } x \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

- Tan er voksende, og derfor enentydig. Den omvendte funktion kaldes arcustangens og betegnes med arctan.
- arctan omgør, hvad Tan gør:

$$\begin{aligned} \arctan(a) = b &\iff \text{Tan}(b) = a \\ &\iff \tan(b) = a \wedge b \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

- Definitionsmængden for arctan er værdimængden for Tan, altså R .
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ og $\frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- $\arctan 0 = 0$ da $\tan 0 = 0$ og $0 \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ da $\tan \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$ og $\frac{\pi}{3} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- $\arctan \left(\tan \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

arctan II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in R$.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

arctan II

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in R$.
- $\arctan(\tan x) = x$ for alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in R$.
- $\arctan(\tan x) = x$ for alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- arctan er differentierabel i ethvert $x \in R$ med

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
[arcsin I](#)
[arcsin II](#)
[arccos I](#)
[arccos II](#)
[arctan I](#)
[arctan II](#)

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in R$.
- $\arctan(\tan x) = x$ for alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- arctan er differentiabel i ethvert $x \in R$ med

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og lad $f = \tan$ i den generelle sætning om differentierabilitet. $f'(x_0) = 1 + \tan^2 x_0 \neq 0$.
Sæt $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$, så gælder

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

- $\tan(\arctan x) = x$ for alle $x \in R$.
- $\arctan(\tan x) = x$ for alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- arctan er differentierabel i ethvert $x \in R$ med

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

- Bevis. Lad $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ og lad $f = \tan$ i den generelle sætning om differentierabilitet. $f'(x_0) = 1 + \tan^2 x_0 \neq 0$.
Sæt $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$, så gælder

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

- Maple.

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner
sinh og cosh
tanh, arsinh, arcosh,
artanh

sinh og cosh

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

- Sinus hyperbolsk defineres således

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arcsinh, arcosh,
artanh

sinh og cosh

- ▶ Sinus hyperbolsk defineres således

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

- ▶ Cosinus hyperbolsk defineres således

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
tanh, arcsinh, arcosh,
artanh

sinh og cosh

- ▶ Sinus hyperbolsk defineres således

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

- ▶ Cosinus hyperbolsk defineres således

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

- ▶ Begge er definerede og differentiable overalt med

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

sinh og cosh

- ▶ Sinus hyperbolsk defineres således

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

- ▶ Cosinus hyperbolsk defineres således

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

- ▶ Begge er definerede og differentiable overalt med

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

- ▶ Hyperbolsk idiotformel: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Bevis:

$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \left(\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right)^2 - \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

tanh, arsinh, arcosh, artanh

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

- Tangens hyperbolsk defineres således

Preben Alsholm

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
**tanh, arsinh, arcosh,
artanh**

tanh, arsinh, arcosh, artanh

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Tangens hyperbolsk defineres således

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- **sinh er voksende og derfor enentydig. Den har en invers: arsinh.**

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
arcsin I
arcsin II
arccos I
arccos II
arctan I
arctan II

Hyperbolske
funktioner

sinh og cosh
**tanh, arsinh, arcosh,
artanh**

tanh, arsinh, arcosh, artanh

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Tangens hyperbolsk defineres således

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- \sinh er voksende og derfor enentydig. Den har en invers: arsinh .
- Det kan vises, at for alle $x \in R$:

$$\text{arsinh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
 arcsin I
 arcsin II
 arccos I
 arccos II
 arctan I
 arctan II

Hyperbolske
funktioner
 \sinh og \cosh
 $\tanh, \text{arsinh}, \text{arcosh},$
 artanh

tanh, arsinh, arcosh, artanh

Arcusfunktioner,
hyperbolske
funktioner

Preben Alsholm

- Tangens hyperbolsk defineres således

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- \sinh er voksende og derfor enentydig. Den har en invers: arsinh .
- Det kan vises, at for alle $x \in R$:

$$\text{arsinh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- \cosh er ikke enentydig, men restriktionen til $[0, \infty[$ er. Den omvendte hertil er arcosh .

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
 arcsin I
 arcsin II
 arccos I
 arccos II
 arctan I
 arctan II

Hyperbolske
funktioner
 \sinh og \cosh
 $\tanh, \text{arsinh}, \text{arcosh},$
 artanh

tanh, arsinh, arcosh, artanh

- Tangens hyperbolsk defineres således

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- \sinh er voksende og derfor enentydig. Den har en invers: arsinh .
- Det kan vises, at for alle $x \in R$:

$$\text{arsinh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- \cosh er ikke enentydig, men restriktionen til $[0, \infty[$ er. Den omvendte hertil er arcosh .
- Det kan vises, at for alle $x \geq 1$:

$$\text{arcosh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

Omvendte
trigonometriske
funktioner

Omvendt funktion
generelt
 arcsin I
 arcsin II
 arccos I
 arccos II
 arctan I
 arctan II

Hyperbolske
funktioner
 \sinh og \cosh
 $\tanh, \text{arsinh}, \text{arcosh},$
 artanh

tanh, arsinh, arcosh, artanh

- Tangens hyperbolsk defineres således

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- \sinh er voksende og derfor enentydig. Den har en invers: arsinh .
- Det kan vises, at for alle $x \in R$:

$$\text{arsinh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- \cosh er ikke enentydig, men restriktionen til $[0, \infty[$ er. Den omvendte hertil er arcosh .
- Det kan vises, at for alle $x \geq 1$:

$$\text{arcosh } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

- For mere se **Maple**.

Omvendte
trigonometriske
funktionerOmvendt funktion
generelt
 arcsin I
 arcsin II
 arccos I
 arccos II
 arctan I
 arctan II Hyperbolske
funktioner
 \sinh og \cosh
 $\tanh, \text{arsinh}, \text{arcosh},$
 artanh