Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Taylorpolynomier
Funktion af flere variable

Preben Alsholm

17. april 2008

Definition af Taylorpolynomium

- Givet en funktion f og et udviklingspunkt x_0. Find et polynomium P_n af grad højst n, så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredie, ..., n'te afledede i punktet x_0.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Definition af Taylorpolynomium

- Givet en funktion f og et udviklingspunkt x_0. Find et polynomium P_n af grad højst n, så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredie, ..., n'te afledede i punktet x_0.
- P_n skal så opfylde ligningerne

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= f(x_0) \\
P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\
P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\
&\vdots \\
P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

Definition af Taylorpolynomium

- Givet en funktion f og et udviklingspunkt x_0. Find et polynomium P_n af grad højst n, så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredie, ..., n'te afledede i punktet x_0.
- P_n skal så opfylde ligningerne

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

- Skriver vi P_n på formen

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \\ & + a_4(x-x_0)^4 + \ldots + a_n(x-x_0)^n \end{aligned}$$

søger vi nu $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 \\ &\quad + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

- fås, at $a_1 = f'(x_0)$. Da

$$\begin{aligned} P_n''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0) + 4\cdot 3\cdot a_4(x-x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \end{aligned}$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$
\begin{aligned}
P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 \\
&\quad + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1}
\end{aligned}
$$

- fås, at $a_1 = f'(x_0)$. Da

$$
\begin{aligned}
P_n''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x - x_0)^2 \\
&\quad + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}
\end{aligned}
$$

- fås $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$. Da

$$
\begin{aligned}
P_n'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x - x_0) \\
&\quad + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}
\end{aligned}
$$

fås, at $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x_0)$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

således at

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

såledet at

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

idet vi definerer $0! = 1$ og $f^{(0)} = f$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Eksempel 4.8.2 i Adams

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n. Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Eksempel 4.8.2 i Adams

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n. Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Eksempel 4.8.2 i Adams

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n. Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Eksempel 4.8.2 i Adams

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n. Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

- Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Eksempel 4.8.2 i Adams

- $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n. Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- Hermed fås

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \end{aligned}$$

- Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

Taylorpolynomier. Funktion af flere variable

Preben Alsholm

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

- Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- Vi har

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

- Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.
- Hermed fås

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion givet ved simpel forskrift

- $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

- Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.
- Hermed fås

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

- Maple

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Vi skal finde $P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Vi skal finde $P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen
$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
- Vi skal finde
$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås
$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- Ved differentiation af differentialligningen fås
$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot \left(1 + 2x(t)\,x'(t)\right).$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen
$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
- Vi skal finde
$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås
$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- Ved differentiation af differentialligningen fås
$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot \left(1 + 2x(t)\,x'(t)\right).$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås
$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0.$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen
$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
- Vi skal finde $P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- Ved differentiation af differentialligningen fås $x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)\,x'(t)).$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås $x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0.$
- Altså fås $P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Funktion givet ved differentialligning

- Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Vi skal finde
$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås
$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- Ved differentiation af differentialligningen fås
$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)\,x'(t)).$
- Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås
$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0.$
- Altså fås
$P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$
- som jo er det samme som det første Taylorpolynomium $P_1(t)$. Se Maple for $P_3(t)$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n?

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n?
- Taylors formel: For givet x findes et tal ξ mellem x_0 og x, så

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\
&\quad \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n?
- Taylors formel: For givet x findes et tal ξ mellem x_0 og x, så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- Altså $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Taylors formel med Lagrange's restled

- Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n?
- Taylors formel: For givet x findes et tal ξ mellem x_0 og x, så

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\
&\quad \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

- Altså $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$.
- Beviset bruger en udvidet udgave af middelværdisætningen.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.
- $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left|\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.
- $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- Bestem n, så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.
- $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- Bestem n, så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.
- I Taylors formel gælder så $|\xi| \leq 0.1$ og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$.
- $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$\left|e^x - P_n(x)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}$$

- Bestem n, så $\left|e^x - P_n(x)\right| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.
- I Taylors formel gælder så $|\xi| \leq 0.1$ og dermed

$$\begin{aligned}\left|e^x - P_n(x)\right| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!}(0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}\end{aligned}$$

- Vi vælger nu n, så $\frac{2}{(n+1)!}(0.1)^{n+1} \leq 10^{-5}$. $n = 3$ er nok, idet $\frac{2}{4!}10^{-4} = \frac{1}{12}10^{-4} < 10^{-5}$.

Taylorpolynomier. Funktion af flere variable

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t)\cos\left(t^3\right) dt$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved
$$f(x) = \int_0^x (1+t)\cos\left(t^3\right) dt$$
- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t)\cos\left(t^3\right) dt$$

- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- Vi finder

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)\cos\left(x^3\right) \\
f''(x) &= \cos\left(x^3\right) - (1+x)\,3x^2 \sin\left(x^3\right) \\
f'''(x) &= -6x(1+2x)\sin\left(x^3\right) - 9x^4(1+x)\cos\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved
$$f(x) = \int_0^x (1+t)\cos\left(t^3\right) dt$$
- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- Vi finder
$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)\cos\left(x^3\right) \\ f''(x) &= \cos\left(x^3\right) - (1+x)\,3x^2\sin\left(x^3\right) \\ f'''(x) &= -6x(1+2x)\sin\left(x^3\right) - 9x^4(1+x)\cos\left(x^3\right) \end{aligned}$$
- Heraf findes $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved
$$f(x) = \int_0^x (1+t)\cos\left(t^3\right) dt$$
- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- Vi finder
$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)\cos\left(x^3\right) \\ f''(x) &= \cos\left(x^3\right) - (1+x)\,3x^2\sin\left(x^3\right) \\ f'''(x) &= -6x(1+2x)\sin\left(x^3\right) - 9x^4(1+x)\cos\left(x^3\right) \end{aligned}$$
- Heraf findes $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.
- Vha. Maple findes, at $|f'''(x)| \leq 1.59$ for $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Altså fås
$$|f(x) - P_2(x)| \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6}|x|^3 \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \simeq 0.033$$
Den faktiske maksimale fejl kan findes grafisk til 0.0008.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4);` som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$, betyder der følgende:

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4);` som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$, betyder der følgende:
- Der findes en konstant K, så

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel 4.8.2 i Adams

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Store O-notationen

Funktion af flere variable

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4);` som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$, betyder der følgende:
- Der findes en konstant K, så

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.
- Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \to a$, at der findes en konstant K, så

$$|f(x)| \leq K\,|u(x)|$$

for alle x i et interval med a som indre punkt.

Taylorpolynomier. Funktion af flere variable
Preben Alsholm
Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4);` som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$, betyder der følgende:
- Der findes en konstant K, så

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right| \leq Kx^4$$

  for alle x i et interval med 0 som indre punkt.
- Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \to a$, at der findes en konstant K, så

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

  for alle x i et interval med a som indre punkt.
- Vi har eksempelvis: $\sin x = O(x), \sin x = x + O\left(x^2\right)$, men også $\sin x = x + O\left(x^3\right)$ og den allerede viste.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen
Funktion af flere variable

Store O-notationen

- Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4);` som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$, betyder der følgende:
- Der findes en konstant K, så
$$\left|\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right| \leq Kx^4$$
for alle x i et interval med 0 som indre punkt.
- Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \to a$, at der findes en konstant K, så
$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$
for alle x i et interval med a som indre punkt.
- Vi har eksempelvis: $\sin x = O(x)$, $\sin x = x + O\left(x^2\right)$, men også $\sin x = x + O\left(x^3\right)$ og den allerede viste.
- I Taylor-sammenhæng kan $O\left((x - x_0)^n\right)$ tolkes som led af orden n og højere.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion af flere variable

- Hvad er en reel funktion af flere variable?

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion af flere variable

- Hvad er en reel funktion af flere variable?
- Hvad er grafen for en reel funktion af 2 variable?

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion af flere variable

- Hvad er en reel funktion af flere variable?
- Hvad er grafen for en reel funktion af 2 variable?
- Hvad er en niveaukurve for en reel funktion af 2 variable?

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable

Funktion af flere variable

- Hvad er en reel funktion af flere variable?
- Hvad er grafen for en reel funktion af 2 variable?
- Hvad er en niveaukurve for en reel funktion af 2 variable?
- Se Maple-worksheet.

Taylorpolynomier
Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel 4.8.2 i Adams
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Store O-notationen

Funktion af flere variable