

Funktion af flere variable

Preben Alsholm

21. april 2008

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- ▶ Skal give mening til $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b) , for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b) .

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- ▶ Skal give mening til $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b) , for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b) .
- ▶ Funktionen f siges at have grænseværdien L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- ▶ Skal give mening til $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b) , for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b) .
- ▶ Funktionen f siges at have grænseværdien L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

- ▶ Eksempel 3, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- ▶ Skal give mening til $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b) , for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b) .
- ▶ Funktionen f siges at have grænseværdien L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

- ▶ Eksempel 3, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$.

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- ▶ Skal give mening til $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b) , for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b) .
- ▶ Funktionen f siges at have grænseværdien L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

- ▶ Eksempel 3, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$.
- ▶ Vi har $f(x,x) = 1$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 1$.

Grænseværdi, Definition og Eksempel 3

- ▶ Skal give mening til $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ for et punkt (a,b) , for hvilket der i enhver omegn befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a,b) .
- ▶ Funktionen f siges at have grænseværdien L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

- ▶ Eksempel 3, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x,0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$.
- ▶ Vi har $f(x,x) = 1$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 1$.
- ▶ Vi konkluderer, at $f(x,y)$ ikke har nogen grænseværdi for $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Grænseværdi, Eksempel 4

- ▶ Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

Grænseværdi, Eksempel 4

- ▶ Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.

Grænseværdi, Eksempel 4

- ▶ Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

Grænseværdi, Eksempel 4

- ▶ Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

- ▶ Det er nærliggende at tro, at $f(x, y)$ har grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Men det er GALT!

Grænseværdi, Eksempel 4

- ▶ Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

- ▶ Det er nærliggende at tro, at $f(x, y)$ har grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Men det er GALT!
- ▶ Vi har nemlig for alle $x \neq 0$

$$f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$

Grænseværdi, Eksempel 4

- ▶ Eksempel 4, p.648: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

- ▶ Det er nærliggende at tro, at $f(x, y)$ har grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Men det er GALT!
- ▶ Vi har nemlig for alle $x \neq 0$

$$f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$

- ▶ Altså har $f(x, y)$ ikke nogen grænseværdi for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Grænseværdi, Eksempel 5

- ▶ Eksempel 5, p.649: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Grænseværdi, Eksempel 5

- ▶ Eksempel 5, p.649: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Grænseværdi, Eksempel 5

- ▶ Eksempel 5, p.649: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- ▶ Vi har

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \\ &\leq |y| \end{aligned}$$

Grænseværdi, Eksempel 5

- ▶ Eksempel 5, p.649: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- ▶ Vi har

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \\ &\leq |y| \end{aligned}$$

- ▶ Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis blot $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ vil også $|y| < \varepsilon$ og dermed $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

Grænseværdi, Eksempel 5

- ▶ Eksempel 5, p.649: Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0,0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- ▶ Vi har

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \\ &\leq |y| \end{aligned}$$

- ▶ Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis blot $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ vil også $|y| < \varepsilon$ og dermed $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.
- ▶ **Altså har $f(x, y)$ grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.**

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .
- ▶ f siges da at være kontinuert i (a, b) , hvis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .
- ▶ f siges da at være kontinuert i (a, b) , hvis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af sit definitionsområde, siges den blot at være kontinuert.

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .
- ▶ f siges da at være kontinuert i (a, b) , hvis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af sit definitionsområde, siges den blot at være kontinuert.
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i (a, b) , så er $f + g$, $f - g$, fg kontinuerte i (a, b) .

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .

- ▶ f siges da at være kontinuert i (a, b) , hvis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af sit definitionsområde, siges den blot at være kontinuert.
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i (a, b) , så er $f + g$, $f - g$, fg kontinuerte i (a, b) .
- ▶ Hvis yderligere $g(a, b) \neq 0$ så er $\frac{f}{g}$ kontinuert i (a, b) .

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .

- ▶ f siges da at være kontinuert i (a, b) , hvis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af sit definitionsområde, siges den blot at være kontinuert.
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i (a, b) , så er $f + g$, $f - g$, fg kontinuerte i (a, b) .
- ▶ Hvis yderligere $g(a, b) \neq 0$ så er $\frac{f}{g}$ kontinuert i (a, b) .
- ▶ Antag, at $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ og at F er en funktion af én variabel, der er kontinuert i L .

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad f være defineret i (a, b) og antag, at der i enhver omegn om (a, b) befinder sig et punkt i definitionsområdet forskellig fra (a, b) .

- ▶ f siges da at være kontinuert i (a, b) , hvis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af sit definitionsområde, siges den blot at være kontinuert.
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i (a, b) , så er $f + g$, $f - g$, fg kontinuerte i (a, b) .
- ▶ Hvis yderligere $g(a, b) \neq 0$ så er $\frac{f}{g}$ kontinuert i (a, b) .
- ▶ Antag, at $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ og at F er en funktion af én variabel, der er kontinuert i L .
- ▶ Så gælder

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(f(x, y)) = F(L)$$

Partiel differentiation, Definition

- ▶ Hvis grænseværdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

eksisterer, siges f at have en partiel afledet i punktet (x, y) mht. den første variabel (x) .

Partiel differentiation, Definition

- ▶ Hvis grænseværdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

eksisterer, siges f at have en partiel afledet i punktet (x, y) mht. den første variabel (x) .

- ▶ Den partielle afledede betegnes med $f_1(x, y)$. Altså

$$f_1(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Partiel differentiation, Definition

- ▶ Hvis grænseværdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

eksisterer, siges f at have en partiel afledet i punktet (x, y) mht. den første variabel (x) .

- ▶ Den partielle afledede betegnes med $f_1(x, y)$. Altså

$$f_1(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- ▶ Analogt defineres $f_2(x, y)$:

$$f_2(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Partiel differentiation, Definition

- ▶ Hvis grænseværdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

eksisterer, siges f at have en partiel afledet i punktet (x, y) mht. den første variabel (x) .

- ▶ Den partielle afledede betegnes med $f_1(x, y)$. Altså

$$f_1(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- ▶ Analogt defineres $f_2(x, y)$:

$$f_2(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

- ▶ Andre betegnelser er f_x eller $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, eller hvis vi skriver $z = f(x, y)$, så $\frac{\partial z}{\partial x}$. Betegnelsen $D_1 f(x, y)$ bruges også af Adams.

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Funktion af flere variable

Preben Alsholm

► $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$f_1(x, y) = \cos(2x + 3y) \cdot 2$$

$$f_2(x, y) = \cos(2x + 3y) \cdot 3$$

Funktion af flere variable

Grænseværdi, definition og Eksempel 3

Grænseværdi, Eksempel 4

Grænseværdi, Eksempel 5

Kontinuitet, Definition

Partiel differentiation, Definition

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Tangentplan

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Funktion af flere variable

Preben Alsholm

- ▶ $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$f_1(x, y) = \cos(2x + 3y) \cdot 2$$

$$f_2(x, y) = \cos(2x + 3y) \cdot 3$$

- ▶ De nye funktioner f_1 og f_2 har selv partielle afledede:

$$f_{11}(x, y) = (f_1)_1(x, y) = -4 \sin(2x + 3y)$$

$$f_{12}(x, y) = (f_1)_2(x, y) = -6 \sin(2x + 3y)$$

$$f_{21}(x, y) = (f_2)_1(x, y) = -6 \sin(2x + 3y)$$

$$f_{22}(x, y) = (f_2)_2(x, y) = -9 \sin(2x + 3y)$$

Funktion af flere variable

Grænseværdi, definition og Eksempel 3

Grænseværdi, Eksempel 4

Grænseværdi, Eksempel 5

Kontinuitet, Definition

Partiel differentiation, Definition

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

Tangentplan

Partiel differentiation, Eksempel, Højere afledede

- ▶ $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$. Vi har da

$$f_1(x, y) = \cos(2x + 3y) \cdot 2$$

$$f_2(x, y) = \cos(2x + 3y) \cdot 3$$

- ▶ De nye funktioner f_1 og f_2 har selv partielle afledede:

$$f_{11}(x, y) = (f_1)_1(x, y) = -4 \sin(2x + 3y)$$

$$f_{12}(x, y) = (f_1)_2(x, y) = -6 \sin(2x + 3y)$$

$$f_{21}(x, y) = (f_2)_1(x, y) = -6 \sin(2x + 3y)$$

$$f_{22}(x, y) = (f_2)_2(x, y) = -9 \sin(2x + 3y)$$

- ▶ Sætning 1 (p. 659). Hvis f_1 og f_2 er kontinuerte i en omegn af (a, b) og f_{12} eksisterer i en omegn af (a, b) og er kontinuert i punktet (a, b) , så eksisterer også $f_{21}(a, b)$ og der gælder: $f_{21}(a, b) = f_{12}(a, b)$.

Tangentplan

- ▶ Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.

Tangentplan

- ▶ Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b) \mathbf{k}$.

Tangentplan

- ▶ Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b) \mathbf{k}$.
- ▶ Tilsvarende har kurven $z = f(a, y)$ har for $y = b$ hældningskoefficienten $f_2(a, b)$.

Tangentplan

- ▶ Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b) \mathbf{k}$.
- ▶ Tilsvarende har kurven $z = f(a, y)$ har for $y = b$ hældningskoefficienten $f_2(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b) \mathbf{k}$.

Tangentplan

- ▶ Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b) \mathbf{k}$.
- ▶ Tilsvarende har kurven $z = f(a, y)$ har for $y = b$ hældningskoefficienten $f_2(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b) \mathbf{k}$.
- ▶ Normalvektoren til tangentplanen er da

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_2(a, b) \\ 1 & 0 & f_1(a, b) \end{vmatrix} = f_1(a, b) \mathbf{i} + f_2(a, b) \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Tangentplan

- ▶ Kurven $z = f(x, b)$ har for $x = a$ hældningskoefficienten $f_1(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b) \mathbf{k}$.
- ▶ Tilsvarende har kurven $z = f(a, y)$ har for $y = b$ hældningskoefficienten $f_2(a, b)$.
- ▶ En vektor på tangenten er $\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b) \mathbf{k}$.
- ▶ Normalvektoren til tangentplanen er da

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_2(a, b) \\ 1 & 0 & f_1(a, b) \end{vmatrix} = f_1(a, b) \mathbf{i} + f_2(a, b) \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

- ▶ Tangentplanens ligning er derfor

$$\mathbf{n} \cdot ((x - a) \mathbf{i} + (y - b) \mathbf{j} + (z - f(a, b)) \mathbf{k}) = 0$$

altså

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$