Funktion af flere variable

Preben Alsholm

24. april 2008

Differentiabilitet for funktion af én variabel

- f kaldes differentiabel i a, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(a)$.

Differentiabilitet for funktion af én variabel

- f kaldes differentiabel i a, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(a)$.
- Lineariseringen i punktet a for funktion af én variabel: $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Differentiabilitet for funktion af én variabel

- f kaldes differentiabel i a, hvis grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(a)$.
- Lineariseringen i punktet a for funktion af én variabel: $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $(a, f(a))$ er $y = L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Differentiabilitet for funktion af én variabel

- f kaldes differentiabel i a, hvis grænseværdien
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(a)$.
- Lineariseringen i punktet a for funktion af én variabel: $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $(a, f(a))$ er $y = L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- Hvis f er differentiabel i a så
$$\frac{f(a+h)-L(a+h)}{h} \to 0 \text{ for } h \to 0$$

Differentiabilitet for funktion af én variabel

- f kaldes differentiabel i a, hvis grænseværdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  eksisterer. I bekræftende fald kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og den betegnes med $f'(a)$.
- Lineariseringen i punktet a for funktion af én variabel: $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $(a, f(a))$ er $y = L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- Hvis f er differentiabel i a så

$$\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} \to 0 \text{ for } h \to 0$$

- Dette følger af at

$$\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er
  $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er
  $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$
- Højresiden kaldes lineariseringen af $f(x, y)$ i (a, b).

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er
  $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$
- Højresiden kaldes lineariseringen af $f(x, y)$ i (a, b).
- Definition: f er differentiabel i (a, b) hvis f har partielle afledede i (a, b) og der gælder

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_1(a, b)h - f_2(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

  for $(h, k) \to (0, 0)$.

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er
  $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$
- Højresiden kaldes lineariseringen af $f(x, y)$ i (a, b).
- Definition: f er differentiabel i (a, b) hvis f har partielle afledede i (a, b) og der gælder

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_1(a, b)\,h - f_2(a, b)\,k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

  for $(h, k) \to (0, 0)$.
- Hermed sikres det, at lineariseringen bliver en god approksimation til funktionen i omegnen af (a, b).

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er
  $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$
- Højresiden kaldes lineariseringen af $f(x, y)$ i (a, b).
- Definition: f er differentiabel i (a, b) hvis f har partielle afledede i (a, b) og der gælder

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_1(a, b)h - f_2(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

  for $(h, k) \to (0, 0)$.
- Hermed sikres det, at lineariseringen bliver en god approksimation til funktionen i omegnen af (a, b).
- Sætning 4 (p.674). Hvis f har partielle afledede f_1 og f_2 i en omegn af (a, b), og hvis disse er kontinuerte i (a, b), så er f differentiabel i (a, b).

Differentiabilitet for funktion af 2 variable

- Eksistens af partielle afledede i et punkt (a, b) er ikke engang nok til at sikre, at en funktion er kontinuert.
- Tangentplanens ligning er $z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$
- Højresiden kaldes lineariseringen af $f(x, y)$ i (a, b).
- Definition: f er differentiabel i (a, b) hvis f har partielle afledede i (a, b) og der gælder
$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_1(a, b)h - f_2(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$
for $(h, k) \to (0, 0)$.
- Hermed sikres det, at lineariseringen bliver en god approksimation til funktionen i omegnen af (a, b).
- Sætning 4 (p.674). Hvis f har partielle afledede f_1 og f_2 i en omegn af (a, b), og hvis disse er kontinuerte i (a, b), så er f differentiabel i (a, b).
- Approksimation ved linearisering: Eksempel 1 p. 673: Maple.

Gradienten

- Gradienten af en funktion f af 2 variable er vektoren

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Gradienten

- Gradienten af en funktion f af 2 variable er vektoren

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Betegnelsen $\nabla f(x,y)$ bruges også. ∇ kaldes nabla.

Gradienten

- Gradienten af en funktion f af 2 variable er vektoren

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Betegnelsen $\nabla f(x,y)$ bruges også. ∇ kaldes nabla.
- For en funktion f af 3 variable er definitionen tilsvarende

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Gradienten

- Gradienten af en funktion f af 2 variable er vektoren

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Betegnelsen $\nabla f(x,y)$ bruges også. ∇ kaldes nabla.
- For en funktion f af 3 variable er definitionen tilsvarende

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix}$$

- Sætning 6 (p.681): For en differentiabel funktion gælder, at gradienten i et punkt (a,b) er vinkelret på niveaukurven for f gennem punktet, $f(x(t), y(t)) = f(a,b)$.

Gradienten

- Gradienten af en funktion f af 2 variable er vektoren

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Betegnelsen $\nabla f(x,y)$ bruges også. ∇ kaldes nabla.
- For en funktion f af 3 variable er definitionen tilsvarende

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix}$$

- Sætning 6 (p.681): For en differentiabel funktion gælder, at gradienten i et punkt (a,b) er vinkelret på niveaukurven for f gennem punktet, $f(x(t), y(t)) = f(a,b)$.
- Maple-illustration

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Punktet a kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) < f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Punktet a kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) < f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Fællesbetegnelse for disse to er ekstremumspunkt.

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Punktet a kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) < f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Fællesbetegnelse for disse to er ekstremumspunkt.
- Punktet a kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle x.

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Punktet a kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) < f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Fællesbetegnelse for disse to er ekstremumspunkt.
- Punktet a kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle x.
- Punktet a kaldes et globalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) \leq f(a)$ for alle x.

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Punktet a kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) < f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Fællesbetegnelse for disse to er ekstremumspunkt.
- Punktet a kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle x.
- Punktet a kaldes et globalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) \leq f(a)$ for alle x.
- Mindsteværdien for f er værdien af f i et globalt minimumspunkt.

Ekstremum for funktion af én variabel: Definitioner

- Punktet a kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) > f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Punktet a kaldes et egentligt lokalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) < f(a)$ for alle x i et interval omkring a og med $x \neq a$.
- Fællesbetegnelse for disse to er ekstremumspunkt.
- Punktet a kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x) \geq f(a)$ for alle x.
- Punktet a kaldes et globalt maksimumspunkt for f, hvis $f(x) \leq f(a)$ for alle x.
- Mindsteværdien for f er værdien af f i et globalt minimumspunkt.
- Størsteværdien for f er værdien af f i et globalt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i c, så gælder, at $f'(c) = 0$.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i c, så gælder, at $f'(c) = 0$.
- Definition: Hvis $f'(c) = 0$ vil c blive kaldt et stationært punkt for f.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i c, så gælder, at $f'(c) = 0$.
- Definition: Hvis $f'(c) = 0$ vil c blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 2 side 218: Ekstremumspunkterne for f på intervallet $I = [a, b]$ findes blandt

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i c, så gælder, at $f'(c) = 0$.
- Definition: Hvis $f'(c) = 0$ vil c blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 2 side 218: Ekstremumspunkterne for f på intervallet $I = [a, b]$ findes blandt
  1. Stationære punkter for f. (Critical points)

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i c, så gælder, at $f'(c) = 0$.
- Definition: Hvis $f'(c) = 0$ vil c blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 2 side 218: Ekstremumspunkterne for f på intervallet $I = [a, b]$ findes blandt
  1. Stationære punkter for f. (Critical points)
  2. Punkter hvor f ikke er differentiabel. (Singular points)

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger I

- En kontinuert funktion antager på et lukket og begrænset interval en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i c, så gælder, at $f'(c) = 0$.
- Definition: Hvis $f'(c) = 0$ vil c blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 2 side 218: Ekstremumspunkterne for f på intervallet $I = [a, b]$ findes blandt
    1. Stationære punkter for f. (Critical points)
    2. Punkter hvor f ikke er differentiabel. (Singular points)
    3. Endepunkterne for intervallet I.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.

- Bevis:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.
- Bevis:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

- Så $f''(x_0) < 0$ betyder, at for $|h|$ lille nok gælder

$$\frac{f'(x_0 + h)}{h} < \frac{1}{2} f''(x_0) < 0$$

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.

- Bevis:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

- Så $f''(x_0) < 0$ betyder, at for $|h|$ lille nok gælder

$$\frac{f'(x_0 + h)}{h} < \frac{1}{2} f''(x_0) < 0$$

- For $h > 0$ betyder dette, at $f'(x_0 + h) < 0$

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.
- Bevis:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

- Så $f''(x_0) < 0$ betyder, at for $|h|$ lille nok gælder

$$\frac{f'(x_0 + h)}{h} < \frac{1}{2} f''(x_0) < 0$$

- For $h > 0$ betyder dette, at $f'(x_0 + h) < 0$
- og for $h < 0$ betyder det, at $f'(x_0 + h) > 0$.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger II

- Sætning 6 side 226. Lad x_0 være et stationært punkt for f. Antag, at $f''(x_0)$ eksisterer. Så gælder:
  1. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er x_0 et egentligt lokalt maksimumspunkt for f.
  2. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er x_0 et egentligt lokalt minimumspunkt for f.
- Bevis:

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}$$

- Så $f''(x_0) < 0$ betyder, at for $|h|$ lille nok gælder

$$\frac{f'(x_0+h)}{h} < \frac{1}{2} f''(x_0) < 0$$

- For $h > 0$ betyder dette, at $f'(x_0+h) < 0$
- og for $h < 0$ betyder det, at $f'(x_0+h) > 0$.
- Men så må x_0 være et maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad f være defineret i det åbne interval I og lad $a \in I$. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad f være defineret i det åbne interval I og lad $a \in I$. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder
  1. Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad f være defineret i det åbne interval I og lad $a \in I$. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder
  1. Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  2. Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) \neq 0$, så har f ikke lokalt ekstremum i a.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad f være defineret i det åbne interval I og lad $a \in I$. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder
  1. Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  2. Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) \neq 0$, så har f ikke lokalt ekstremum i a.
  3. Hvis $f''(a) = f'''(a) = 0$, så gælder: Hvis $f^{(4)}(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt og hvis $f^{(4)}(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad f være defineret i det åbne interval I og lad $a \in I$. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder
  1. Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  2. Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) \neq 0$, så har f ikke lokalt ekstremum i a.
  3. Hvis $f''(a) = f'''(a) = 0$, så gælder: Hvis $f^{(4)}(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt og hvis $f^{(4)}(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  4. Generelt: Lad $f^{(n)}(a)$ være den første afledede forskellig fra nul. Hvis n er ulige, har f ikke lokalt ekstremum i a. Hvis n er lige har f egentligt lokalt minimum i a, hvis $f^{(n)}(a) > 0$, og egentligt lokalt maksimum i a, hvis $f^{(n)}(a) < 0$.

Ekstremum for funktion af én variabel: Sætninger III

- Lad f være defineret i det åbne interval I og lad $a \in I$. Antag, at f er n gange differentiabel, hvor $n \geq 2$, og at $f^{(n)}$ er kontinuert i a. Antag, at $f'(a) = 0$. Så gælder
  1. Hvis $f''(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt. Hvis $f''(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  2. Hvis $f''(a) = 0$ og $f'''(a) \neq 0$, så har f ikke lokalt ekstremum i a.
  3. Hvis $f''(a) = f'''(a) = 0$, så gælder: Hvis $f^{(4)}(a) > 0$, så er a et egentligt lokalt minimumspunkt og hvis $f^{(4)}(a) < 0$, så er a et egentligt lokalt maksimumspunkt.
  4. Generelt: Lad $f^{(n)}(a)$ være den første afledede forskellig fra nul. Hvis n er ulige, har f ikke lokalt ekstremum i a. Hvis n er lige har f egentligt lokalt minimum i a, hvis $f^{(n)}(a) > 0$, og egentligt lokalt maksimum i a, hvis $f^{(n)}(a) < 0$.
- Bevis: Se Taylor-noterne på hjemmesiden. Maple.

Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet (a, b) kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) > f(a, b)$ for alle (x, y) i en omegn omkring (a, b) og med $(x, y) \neq (a, b)$.

Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet (a, b) kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) > f(a, b)$ for alle (x, y) i en omegn omkring (a, b) og med $(x, y) \neq (a, b)$.
- Analogt defineres egentligt lokalt maksimumspunkt. Fællesbetegnelse for disse to er *ekstremumspunkt*.

Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet (a, b) kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) > f(a, b)$ for alle (x, y) i en omegn omkring (a, b) og med $(x, y) \neq (a, b)$.
- Analogt defineres egentligt lokalt maksimumspunkt. Fællesbetegnelse for disse to er *ekstremumspunkt*.
- Punktet (a, b) kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) \geq f(a, b)$ for alle (x, y).

Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet (a, b) kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) > f(a, b)$ for alle (x, y) i en omegn omkring (a, b) og med $(x, y) \neq (a, b)$.
- Analogt defineres egentligt lokalt maksimumspunkt. Fællesbetegnelse for disse to er *ekstremumspunkt*.
- Punktet (a, b) kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) \geq f(a, b)$ for alle (x, y).
- Analogt defineres globalt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet (a, b) kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) > f(a, b)$ for alle (x, y) i en omegn omkring (a, b) og med $(x, y) \neq (a, b)$.
- Analogt defineres egentligt lokalt maksimumspunkt. Fællesbetegnelse for disse to er *ekstremumspunkt*.
- Punktet (a, b) kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) \geq f(a, b)$ for alle (x, y).
- Analogt defineres globalt maksimumspunkt.
- Mindsteværdien for f er værdien af f i et globalt minimumspunkt. Størsteværdien er værdien af f i et globalt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af to variable: Definitioner

- Punktet (a, b) kaldes et egentligt lokalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) > f(a, b)$ for alle (x, y) i en omegn omkring (a, b) og med $(x, y) \neq (a, b)$.
- Analogt defineres egentligt lokalt maksimumspunkt. Fællesbetegnelse for disse to er *ekstremumspunkt*.
- Punktet (a, b) kaldes et globalt minimumspunkt for f, hvis $f(x, y) \geq f(a, b)$ for alle (x, y).
- Analogt defineres globalt maksimumspunkt.
- Mindsteværdien for f er værdien af f i et globalt minimumspunkt. Størsteværdien er værdien af f i et globalt maksimumspunkt.
- Begreberne Indre punkt, randpunkt, åben mængde, lukket (afsluttet) mængde, begrænset mængde defineres på tavlen med kridt. Se i øvrigt Adams, p. 541-542.

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i (a, b), så gælder, at $f_1(a, b) = 0$ og $f_2(a, b) = 0$.

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i (a, b), så gælder, at $f_1(a, b) = 0$ og $f_2(a, b) = 0$.
- Definition: Hvis $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ vil (a, b) blive kaldt et stationært punkt for f.

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i (a, b), så gælder, at $f_1(a, b) = 0$ og $f_2(a, b) = 0$.
- Definition: Hvis $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ vil (a, b) blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 1 side 708: Ekstremumspunkterne for f på mængden S findes blandt

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i (a, b), så gælder, at $f_1(a, b) = 0$ og $f_2(a, b) = 0$.
- Definition: Hvis $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ vil (a, b) blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 1 side 708: Ekstremumspunkterne for f på mængden S findes blandt
  1. Stationære punkter for f. (Critical points)

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i (a, b), så gælder, at $f_1(a, b) = 0$ og $f_2(a, b) = 0$.
- Definition: Hvis $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ vil (a, b) blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 1 side 708: Ekstremumspunkterne for f på mængden S findes blandt
    1. Stationære punkter for f. (Critical points)
    2. Punkter hvor f ikke har partielle afledede. (Singular points)

Ekstremum for funktion af to variable: Sætninger

- En kontinuert funktion antager på en lukket og begrænset mængde en største- og en mindsteværdi.
- Hvis f er differentiabel i det indre punkt c og hvis f har lokalt ekstremum i (a, b), så gælder, at $f_1(a, b) = 0$ og $f_2(a, b) = 0$.
- Definition: Hvis $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ vil (a, b) blive kaldt et stationært punkt for f.
- Sætning 1 side 708: Ekstremumspunkterne for f på mængden S findes blandt
  1. Stationære punkter for f. (Critical points)
  2. Punkter hvor f ikke har partielle afledede. (Singular points)
  3. Randpunkterne for S. (Boundary points)