

# Ekstremum for funktion af flere variable

Preben Alsholm

28. april 2008

# Hessematricen I

- ▶ Et stationært punkt for en funktion af flere variable  $f$  vil her blive kaldt et *egentligt* saddepunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken  $f$  har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken  $f$  har egentligt minimum.

# Hessematrixen I

- ▶ Et stationært punkt for en funktion af flere variable  $f$  vil her blive kaldt et *egentligt* saddelpunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken  $f$  har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken  $f$  har egentligt minimum.
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable. Antag, at  $f$  har partielle afledede af anden orden i punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Hessematrixen for  $f$  i punktet  $a$  er den matrix  $H(a)$ , hvis element  $(i, j)$  er

$$f_{ij}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

# Hessematrixen I

- ▶ Et stationært punkt for en funktion af flere variable  $f$  vil her blive kaldt et *egentligt* saddepunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken  $f$  har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken  $f$  har egentligt minimum.
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable. Antag, at  $f$  har partielle afledede af anden orden i punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Hessematrixen for  $f$  i punktet  $a$  er den matrix  $H(a)$ , hvis element  $(i, j)$  er

$$f_{ij}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

- ▶ Er  $f$  en funktion af 2 variable  $x$  og  $y$  er Hessematrixen i punktet  $a = (a_1, a_2)$  altså givet ved

$$H(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} f_{11}(a_1, a_2) & f_{12}(a_1, a_2) \\ f_{12}(a_1, a_2) & f_{22}(a_1, a_2) \end{bmatrix}$$

# Hessematricen II

- ▶ Er  $f$  en funktion af 3 variable  $x, y$  og  $z$  er Hessematricen i punktet  $a = (a_1, a_2, a_3)$  givet ved

$$H(a) = \begin{bmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & f_{13}(a) \\ f_{12}(a) & f_{22}(a) & f_{23}(a) \\ f_{13}(a) & f_{23}(a) & f_{33}(a) \end{bmatrix}$$

- ▶ Er  $f$  en funktion af 3 variable  $x, y$  og  $z$  er Hessematricen i punktet  $a = (a_1, a_2, a_3)$  givet ved

$$H(a) = \begin{bmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & f_{13}(a) \\ f_{12}(a) & f_{22}(a) & f_{23}(a) \\ f_{13}(a) & f_{23}(a) & f_{33}(a) \end{bmatrix}$$

- ▶ Eksempel. Funktionen  $f$  givet ved  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  har partielle afledede

$$f_1(x, y) = 2x - 2xy \text{ og } f_2(x, y) = -x^2 + 4y$$

# Hessematrixen II

- ▶ Er  $f$  en funktion af 3 variable  $x, y$  og  $z$  er Hessematrixen i punktet  $a = (a_1, a_2, a_3)$  givet ved

$$H(a) = \begin{bmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & f_{13}(a) \\ f_{12}(a) & f_{22}(a) & f_{23}(a) \\ f_{13}(a) & f_{23}(a) & f_{33}(a) \end{bmatrix}$$

- ▶ Eksempel. Funktionen  $f$  givet ved  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  har partielle afledede

$$f_1(x, y) = 2x - 2xy \text{ og } f_2(x, y) = -x^2 + 4y$$

- ▶ Hessematrixen i punktet  $(x, y)$  er

$$\begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$$

# Hessematricen III

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).



# Hessematricen III

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Antag, at  $a$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a)$  være Hessematricen for  $f$  i  $a$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

**Hessematricen III**

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Antag, at  $a$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a)$  være Hessematricen for  $f$  i  $a$ .
- ▶ Så gælder

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

**Hessematricen III**

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Antag, at  $a$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a)$  være Hessematricen for  $f$  i  $a$ .
- ▶ Så gælder
  1. Hvis egenverdierne for  $H(a)$  alle er positive, så er  $a$  et egentligt minimumspunkt.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

**Hessematricen III**

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Antag, at  $a$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a)$  være Hessematricen for  $f$  i  $a$ .
- ▶ Så gælder
  1. Hvis egenverdierne for  $H(a)$  alle er positive, så er  $a$  et egentligt minimumspunkt.
  2. Hvis egenverdierne alle er negative, er  $a$  et egentligt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

**Hessematricen III**

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Antag, at  $a$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a)$  være Hessematricen for  $f$  i  $a$ .
- ▶ Så gælder
  1. Hvis egenverdierne for  $H(a)$  alle er positive, så er  $a$  et egentligt minimumspunkt.
  2. Hvis egenverdierne alle er negative, er  $a$  et egentligt maksimumspunkt.
  3. Hvis to af egenverdierne for  $H(a)$  har forskellige fortegn, så er  $a$  et egentligt sadelpunkt.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

**Hessematricen III**

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

- ▶ Sætning (Theorem 3, p. 710 eller Noter på hjemmesiden).
- ▶ Lad  $f$  være en funktion af  $n$  variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Antag, at  $a$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a)$  være Hessematricen for  $f$  i  $a$ .
- ▶ Så gælder
  1. Hvis egenverdierne for  $H(a)$  alle er positive, så er  $a$  et egentligt minimumspunkt.
  2. Hvis egenverdierne alle er negative, er  $a$  et egentligt maksimumspunkt.
  3. Hvis to af egenverdierne for  $H(a)$  har forskellige fortegn, så er  $a$  et egentligt sadelpunkt.
  4. Hvis mindst én af egenverdierne er lig med nul og resten har samme fortegn, så må en nærmere undersøgelse foretages.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

**Hessematricen III**

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Hessematricen IV

- ▶ Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ = & f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 \\ & + \frac{1}{2}(f_{11}(a+\zeta h)h_1^2 + 2f_{12}(a+\zeta h)h_1h_2 + f_{22}(a+\zeta h)h_2^2) \\ = & f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h \end{aligned}$$

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

Hessematricen III

**Hessematricen IV**

Eksempel

Spør om determinant

Spør om determinant 1

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Hessematricen IV

- ▶ Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ = & f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 \\ & + \frac{1}{2}(f_{11}(a+\zeta h)h_1^2 + 2f_{12}(a+\zeta h)h_1h_2 + f_{22}(a+\zeta h)h_2^2) \\ = & f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h \end{aligned}$$

- ▶ I et stationært punkt  $a$  fås dermed

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$$

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

Hessematricen III

**Hessematricen IV**

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II



# Hessematricen IV

- ▶ Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ = & f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 \\ & + \frac{1}{2}(f_{11}(a+\zeta h)h_1^2 + 2f_{12}(a+\zeta h)h_1h_2 + f_{22}(a+\zeta h)h_2^2) \\ = & f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h \end{aligned}$$

- ▶ I et stationært punkt  $a$  fås dermed

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$$

- ▶ Det afgørende er dermed fortegnet for  $\frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$  for små  $h$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

Hessematricen III

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Hessematricen IV

- ▶ Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ &= f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 \\ & \quad + \frac{1}{2}(f_{11}(a+\zeta h)h_1^2 + 2f_{12}(a+\zeta h)h_1h_2 + f_{22}(a+\zeta h)h_2^2) \\ &= f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h \end{aligned}$$

- ▶ I et stationært punkt  $a$  fås dermed

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$$

- ▶ Det afgørende er dermed fortegnet for  $\frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$  for små  $h$ .
- ▶ Hvis  $H(a)$  har udelukkende positive egenverdier, så er  $h^T H(a)h > 0$  for alle  $h$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

Hessematricen III

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Hessematricen IV

- ▶ Beviset bygger på Taylors formel for funktion af flere variable (her 2):

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ &= f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 \\ & \quad + \frac{1}{2}(f_{11}(a+\zeta h)h_1^2 + 2f_{12}(a+\zeta h)h_1h_2 + f_{22}(a+\zeta h)h_2^2) \\ &= f(a) + f_1(a)h_1 + f_2(a)h_2 + \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h \end{aligned}$$

- ▶ I et stationært punkt  $a$  fås dermed

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$$

- ▶ Det afgørende er dermed fortegnet for  $\frac{1}{2}h^T H(a+\zeta h)h$  for små  $h$ .
- ▶ Hvis  $H(a)$  har udelukkende positive egenverdier, så er  $h^T H(a)h > 0$  for alle  $h$ .
- ▶ Derfor gælder for små  $h$ :  $h^T H(a+\zeta h)h > 0$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

Hessematricen III

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Eksempel

- ▶  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  fra tidligere. Stationære punkter er  $(0, 0)$  og  $(\pm 2, 1)$ .

# Eksempel

- ▶  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  fra tidligere. Stationære punkter er  $(0, 0)$  og  $(\pm 2, 1)$ .
- ▶ Vi fandt tidligere  $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I  
Hessematrixen II  
Hessematrixen III  
Hessematrixen IV

### Eksempel

Spor og determinant  
Spor og determinant II  
Kvadratisk form I (baggrund)  
Kvadratisk form II

# Eksempel

- ▶  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  fra tidligere. Stationære punkter er  $(0, 0)$  og  $(\pm 2, 1)$ .
- ▶ Vi fandt tidligere  $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$ .
- ▶ Heraf fås

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H(-2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I  
Hessematrixen II  
Hessematrixen III  
Hessematrixen IV

### Eksempel

Spør og determinant  
Spør og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)  
Kvadratisk form II

# Eksempel

- ▶  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  fra tidligere. Stationære punkter er  $(0, 0)$  og  $(\pm 2, 1)$ .
- ▶ Vi fandt tidligere  $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$ .
- ▶ Heraf fås

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H(-2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- ▶ **Egenverdierne for  $H(0, 0)$  er åbenbart 2 og 4, altså positive, så  $(0, 0)$  er et egentligt lokalt minimumspunkt.**

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I  
Hessematrixen II  
Hessematrixen III  
Hessematrixen IV

**Eksempel**

Spor og determinant  
Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)  
Kvadratisk form II

## Eksempel

- ▶  $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$  fra tidligere. Stationære punkter er  $(0, 0)$  og  $(\pm 2, 1)$ .

- ▶ Vi fandt tidligere  $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}$ .

- ▶ Heraf fås

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H(-2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- ▶ Eigenverdierne for  $H(0, 0)$  er åbenbart 2 og 4, altså positive, så  $(0, 0)$  er et egentligt lokalt minimumspunkt.
- ▶  $H(2, 1)$  og  $H(-2, 1)$  har de samme eigenverdier, nemlig  $2 \pm 2\sqrt{5}$ . Den ene er dermed positiv, den anden er negativ. Punkterne  $(\pm 2, 1)$  er egentlige saddelpunkter.



# Spor og determinant

- Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  have egenverdierne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Så gælder, at

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

$$\text{Spor}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

# Spor og determinant

- ▶ Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  have egenverdierne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Så gælder, at

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$
$$\text{Spor}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

- ▶ Let bevist for  $n = 2$ :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

# Spor og determinant

- ▶ Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  have egenværdierne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Så gælder, at

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

$$\text{Spor}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

- ▶ Let bevist for  $n = 2$ :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

- ▶ Men også

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \text{Spor}(A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

Ekstremum for  
funktion af flere  
variable

Hessematrixen I  
Hessematrixen II  
Hessematrixen III  
Hessematrixen IV  
Eksempel

Spor og determinant  
Spor og determinant  
II  
Kvadratisk form I  
(baggrund)  
Kvadratisk form II

# Spor og determinant

- ▶ Lad  $n \times n$ -matricen  $A$  have egenværdierne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Så gælder, at

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

$$\text{Spor}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

- ▶ Let bevist for  $n = 2$ :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

- ▶ Men også

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \text{Spor}(A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

- ▶ Resultatet følger ved sammenligning.

Ekstremum for  
funktion af flere  
variable

Hessematrixen I  
Hessematrixen II  
Hessematrixen III  
Hessematrixen IV  
Eksempel

Spor og determinant  
Spor og determinant  
II  
Kvadratisk form I  
(baggrund)  
Kvadratisk form II

# Spor og determinant II

- ▶ Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematrixen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

**Spor og determinant II**

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Spor og determinant II

- ▶ Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematrixen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

1. Hvis  $\det H(a, b) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt ekstremumpunkt.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

**Spor og determinant II**

Kvadratisk form I  
(baggrund)

Kvadratisk form II

# Spor og determinant II

- ▶ Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematrixen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

1. Hvis  $\det H(a, b) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt ekstremumpunkt.

1.1 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt minimumspunkt.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

**Spor og determinant II**

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Spor og determinant II

- ▶ Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematricen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

1. Hvis  $\det H(a, b) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt ekstremumpunkt.
  - 1.1 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt minimumspunkt.
  - 1.2 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt maksimumspunkt.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematricen I

Hessematricen II

Hessematricen III

Hessematricen IV

Eksempel

Spor og determinant

**Spor og determinant II**

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II



# Spor og determinant II

- Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematricen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

1. Hvis  $\det H(a, b) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt ekstremumpunkt.
  - 1.1 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt minimumspunkt.
  - 1.2 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt maksimumspunkt.
2. Hvis  $\det H(a, b) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt saddepunkt.

# Spor og determinant II

- Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematrixen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

1. Hvis  $\det H(a, b) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt ekstremumpunkt.
  - 1.1 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt minimumspunkt.
  - 1.2 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt maksimumspunkt.
2. Hvis  $\det H(a, b) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt saddelpunkt.
3. Hvis  $\det H(a, b) = 0$  må en nærmere undersøgelse foretages.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Spor og determinant II

- Lad  $f$  være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet  $(a, b)$ . Antag, at  $(a, b)$  er et stationært punkt for  $f$ . Lad  $H(a, b)$  være Hessematrixen for  $f$  i  $(a, b)$ . Så gælder

1. Hvis  $\det H(a, b) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt ekstremumpunkt.
  - 1.1 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) > 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt minimumspunkt.
  - 1.2 Hvis  $\text{Spor}(H(a, b)) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt maksimumspunkt.
2. Hvis  $\det H(a, b) < 0$ , så er  $(a, b)$  et egentligt saddelpunkt.
3. Hvis  $\det H(a, b) = 0$  må en nærmere undersøgelse foretages.

- Eksempel:  $H(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$  fra tidligere.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Kvadratisk form I (baggrund)

- ▶ Lad  $A$  være en symmetrisk matrix. Udtrykket  $x^T Ax$  hvor  $x$  er en vektor af variable kaldes da en kvadratisk form.

# Kvadratisk form I (baggrund)

- ▶ Lad  $A$  være en symmetrisk matrix. Udtrykket  $x^T Ax$  hvor  $x$  er en vektor af variable kaldes da en kvadratisk form.
- ▶ Er  $A$  en  $2 \times 2$ -matrix, så har vi

$$\begin{aligned}x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\end{aligned}$$

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Kvadratisk form I (baggrund)

- ▶ Lad  $A$  være en symmetrisk matrix. Udtrykket  $x^T Ax$  hvor  $x$  er en vektor af variable kaldes da en kvadratisk form.
- ▶ Er  $A$  en  $2 \times 2$ -matrix, så har vi

$$\begin{aligned}x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2\end{aligned}$$

- ▶  $A$  kaldes positiv definit, hvis  $x^T Ax > 0$  for alle  $x \neq 0$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Kvadratisk form I (baggrund)

- ▶ Lad  $A$  være en symmetrisk matrix. Udtrykket  $x^T Ax$  hvor  $x$  er en vektor af variable kaldes da en kvadratisk form.
- ▶ Er  $A$  en  $2 \times 2$ -matrix, så har vi

$$\begin{aligned}
 x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2
 \end{aligned}$$

- ▶  $A$  kaldes positiv definit, hvis  $x^T Ax > 0$  for alle  $x \neq 0$ .
- ▶  $A$  kaldes negativ definit, hvis  $x^T Ax < 0$  for alle  $x \neq 0$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Kvadratisk form I (baggrund)

- ▶ Lad  $A$  være en symmetrisk matrix. Udtrykket  $x^T Ax$  hvor  $x$  er en vektor af variable kaldes da en kvadratisk form.
- ▶ Er  $A$  en  $2 \times 2$ -matrix, så har vi

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \end{aligned}$$

- ▶  $A$  kaldes positiv definit, hvis  $x^T Ax > 0$  for alle  $x \neq 0$ .
- ▶  $A$  kaldes negativ definit, hvis  $x^T Ax < 0$  for alle  $x \neq 0$ .
- ▶  $A$  kaldes indefinit, hvis der eksisterer et  $x$  så  $x^T Ax > 0$  og et  $x$  så  $x^T Ax < 0$ .



# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.

# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.

# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.

# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.
- ▶ Så gælder:  $P^T P = I$ , dvs.  $P^{-1} = P^T$ .

# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.
- ▶ Så gælder:  $P^T P = I$ , dvs.  $P^{-1} = P^T$ .
- ▶ Hermed er  $P^T A P = D$  diagonal og  $A = P D P^T$

# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.
- ▶ Så gælder:  $P^T P = I$ , dvs.  $P^{-1} = P^T$ .
- ▶ Hermed er  $P^T A P = D$  diagonal og  $A = P D P^T$
- ▶ Med  $y = P^T x$  fås  $x^T A x = x^T P D P^T x = (P^T x)^T D (P^T x) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ .

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.
- ▶ Så gælder:  $P^T P = I$ , dvs.  $P^{-1} = P^T$ .
- ▶ Hermed er  $P^T A P = D$  diagonal og  $A = P D P^T$
- ▶ Med  $y = P^T x$  fås  $x^T A x = x^T P D P^T x = (P^T x)^T D (P^T x) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ .
- ▶  $A$  er positiv definit, hvis og kun hvis alle egenverdier er positive.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II

# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.
- ▶ Så gælder:  $P^T P = I$ , dvs.  $P^{-1} = P^T$ .
- ▶ Hermed er  $P^T A P = D$  diagonal og  $A = P D P^T$
- ▶ Med  $y = P^T x$  fås  $x^T A x = x^T P D P^T x = (P^T x)^T D (P^T x) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ .
- ▶  $A$  er positiv definit, hvis og kun hvis alle egenverdier er positive.
- ▶  $A$  er negativ definit, hvis og kun hvis alle egenverdier er negative.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II



# Kvadratisk form II

- ▶ Enhver reel symmetrisk matrix  $A$  er diagonaliserbar.
- ▶ Desuden gælder, at egenvektorer for  $A$  hørende til forskellige egenverdier er ortogonale.
- ▶ Derfor kan vi vælge en diagonaliserende matrix  $P$  så søjlerne er ortonormale: Ortogonale og har længde 1.
- ▶ Så gælder:  $P^T P = I$ , dvs.  $P^{-1} = P^T$ .
- ▶ Hermed er  $P^T A P = D$  diagonal og  $A = P D P^T$
- ▶ Med  $y = P^T x$  fås  $x^T A x = x^T P D P^T x = (P^T x)^T D (P^T x) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ .
- ▶  $A$  er positiv definit, hvis og kun hvis alle egenverdier er positive.
- ▶  $A$  er negativ definit, hvis og kun hvis alle egenverdier er negative.
- ▶  $A$  er indefinit, hvis  $A$  har både positive og negative egenverdier.

Ekstremum for funktion af flere variable

Hessematrixen I

Hessematrixen II

Hessematrixen III

Hessematrixen IV

Eksempel

Spor og determinant

Spor og determinant II

Kvadratisk form I (baggrund)

Kvadratisk form II