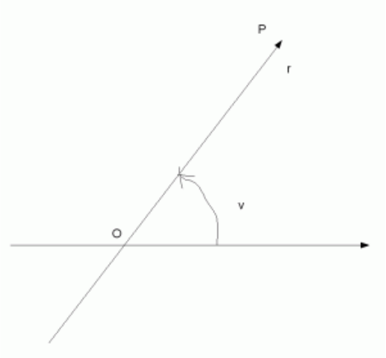
Planintegralet i polære koordinater

Preben Alsholm

8. maj 2008

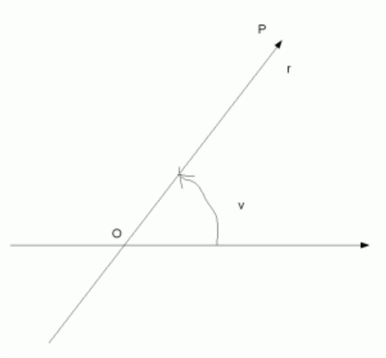
Polære koordinater i planen I

- Den vandrette akse er polaraksen. "O" er polen. Vi betragter et punkt P og tegner en orienteret ret linie gennem O og P.



Polære koordinater i planen I

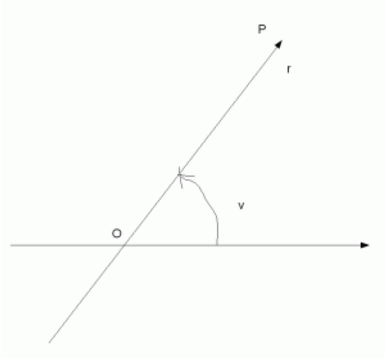
- Den vandrette akse er polaraksen. "O" er polen. Vi betragter et punkt P og tegner en orienteret ret linie gennem O og P.



- Vinklen v regnes med fortegn. r regnes positiv, hvis punktet ligger på pilens side af OP, negativ til den anden side.

Polære koordinater i planen I

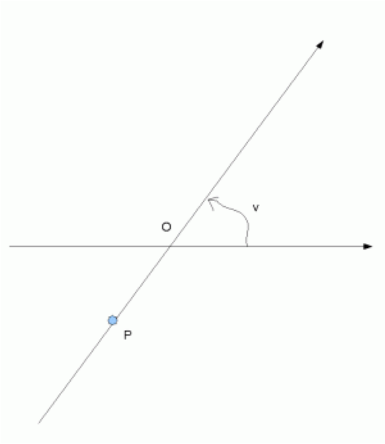
- Den vandrette akse er polaraksen. "O" er polen. Vi betragter et punkt P og tegner en orienteret ret linie gennem O og P.



- Vinklen v regnes med fortegn. r regnes positiv, hvis punktet ligger på pilens side af OP, negativ til den anden side.
- P har de polære koordinater r og v.

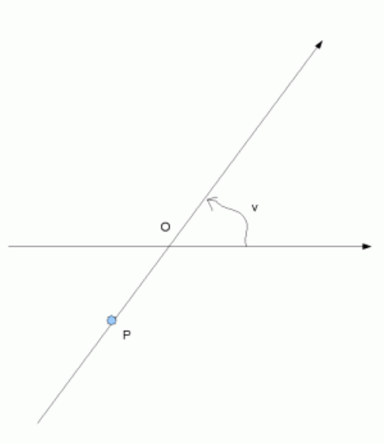
Polære koordinater i planen II

- Med retningen på strålen (den orienterede linie gennem O og P) som vist, har den polære koordinat r en negativ værdi.



Polære koordinater i planen II

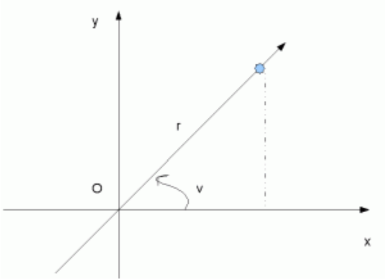
- Med retningen på strålen (den orienterede linie gennem O og P) som vist, har den polære koordinat r en negativ værdi.



- Ønskes en positiv værdi, kan liniens orientering vendes, men så bliver vinklen v forøget med π.

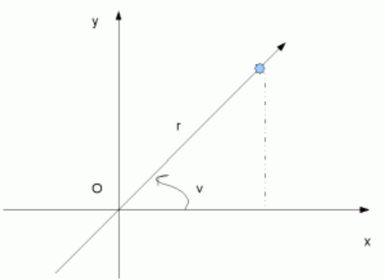
Overgangsformler

- Lad x-aksen være polarakse med pol i begyndelsespunktet.



Overgangsformler

- Lad x-aksen være polarakse med pol i begyndelsespunktet.

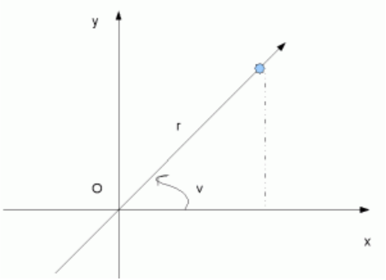


- Overgangsformler, som vi også kender fra komplekse tal:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos v,\ \ y = r\sin v \\
r^2 &= x^2 + y^2,\ \tan v = \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Overgangsformler

- Lad x-aksen være polarakse med pol i begyndelsespunktet.



- Overgangsformler, som vi også kender fra komplekse tal:

$$\begin{aligned} x &= r\cos v,\ y = r\sin v \\ r^2 &= x^2 + y^2,\ \tan v = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

- Sædvanlige xy-koordinater kaldes ofte for cartesiske koordinater efter René Descartes (latin: Renatus Cartesius) 1596-1650.

Overgangsformler. Eksempler

- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.

Overgangsformler. Eksempler

- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.
- Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.

Overgangsformler. Eksempler

- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.
- Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Overgangsformler. Eksempler

- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.
- Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- Givet kurven $r = \sin 2\theta$ i polære koordinater. Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.

Overgangsformler. Eksempler

- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.
- Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- Givet kurven $r = \sin 2\theta$ i polære koordinater. Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \sin 2\theta \Leftrightarrow r = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r^3 = 2r\sin\theta \cdot r\cos\theta \Leftrightarrow r^3 = 2xy \Rightarrow r^6 = 4x^2y^2 \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.

Overgangsformler. Eksempler

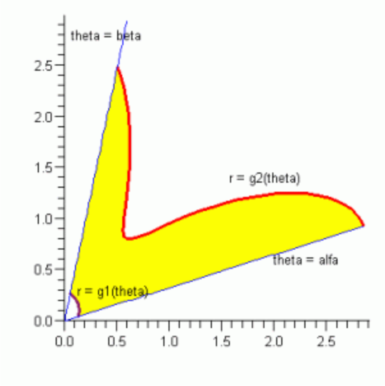
- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.
- Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- Givet kurven $r = \sin 2\theta$ i polære koordinater. Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \sin 2\theta \Leftrightarrow r = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r^3 = 2r\sin\theta \cdot r\cos\theta \Leftrightarrow r^3 = 2xy \Rightarrow r^6 = 4x^2y^2 \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.
- Givet linien $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i cartesiske koordinater. Find en ligning i polære koordinater.

Overgangsformler. Eksempler

- Givet kurven $r = \cos\theta$ i polære koordinater.
- Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- Givet kurven $r = \sin 2\theta$ i polære koordinater. Vil finde en ligning for kurven i cartesiske koordinater.
- Vi finder $r = \sin 2\theta \Leftrightarrow r = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r^3 = 2r\sin\theta \cdot r\cos\theta \Leftrightarrow r^3 = 2xy \Rightarrow r^6 = 4x^2y^2 \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.
- Givet linien $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i cartesiske koordinater. Find en ligning i polære koordinater.
- Vi finder $r\sin\theta = -\frac{1}{2}r\cos\theta + 1$, der kan løses for r. Vi finder $r = \frac{2}{2\sin\theta + \cos\theta}$.

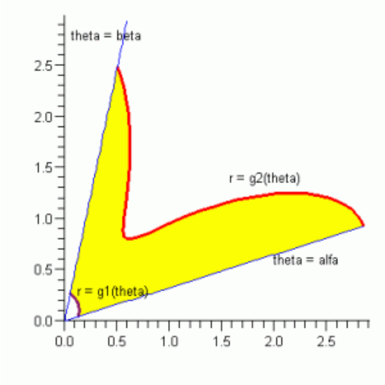
Planintegralet i polære koordinater

- Området D er vist på figuren:



Planintegralet i polære koordinater

- Området D er vist på figuren:

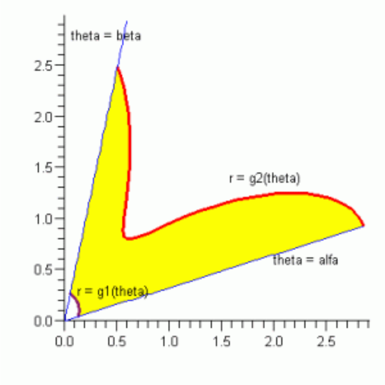


- Vi har

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\cdot dr$$

Planintegralet i polære koordinater

- Området D er vist på figuren:



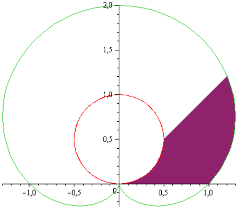
- Vi har

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\cdot dr$$

- hvor man specielt skal bemærke det ekstra r. Se Maple-worksheet.

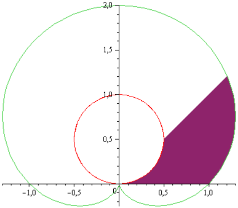
Eksempel 0

- D er området uden for cirklen $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ og indenfor kardioiden $r = 1 + \sin\theta$ med $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Cirklen kan i polære koordinater skrives $r = \sin\theta$.



Eksempel 0

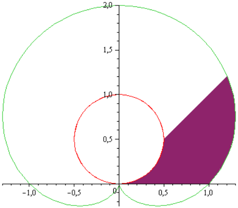
- D er området uden for cirklen $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ og indenfor kardioiden $r = 1 + \sin\theta$ med $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Cirklen kan i polære koordinater skrives $r = \sin\theta$.



- Vi vil først finde arealet af D:
$$\iint\limits_D 1 dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r dr$$

Eksempel 0

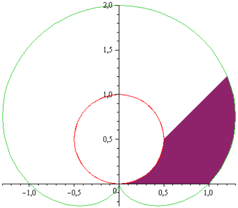
- D er området uden for cirklen $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ og indenfor kardioiden $r = 1 + \sin\theta$ med $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Cirklen kan i polære koordinater skrives $r = \sin\theta$.



- Vi vil først finde arealet af D:
$$\iint_D 1 dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r dr$$
- Inderste integral udregnes, hvorved fås
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1+\sin\theta)^2 - \sin^2\theta\right) d\theta$$

Eksempel 0

- D er området uden for cirklen $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ og indenfor kardioiden $r = 1 + \sin\theta$ med $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Cirklen kan i polære koordinater skrives $r = \sin\theta$.



- Vi vil først finde arealet af D:
$$\iint_D 1 dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r dr$$
- Inderste integral udregnes, hvorved fås
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1+\sin\theta)^2 - \sin^2\theta\right) d\theta$$
- Yderste integral er nu
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - 2\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

Eksempel 0 fortsat

- Derefter integralet $\iint\limits_D x dA$:

$$\iint\limits_D x dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r\cos\theta \cdot r dr$$

Eksempel 0 fortsat

- Derefter integralet $\iint\limits_D x dA$:

$$\iint\limits_D x dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r\cos\theta \cdot r dr$$

- Inderste integral udregnes:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left((1+\sin\theta)^3 - \sin^3\theta\right) d\theta$$

Eksempel 0 fortsat

- Derefter integralet $\iint_D x dA$:

$$\iint_D x dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r\cos\theta \cdot r dr$$

- Inderste integral udregnes:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left((1+\sin\theta)^3 - \sin^3\theta\right) d\theta$$

- Substitutionen $t = \sin\theta$ giver $dt = \cos\theta d\theta$, så vi får

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left((1+t)^3 - t^3\right) dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(3t^2 + 3t + 1\right) dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Eksempel 0 fortsat

- Derefter integralet $\iint\limits_D x dA$:

$$\iint\limits_D x dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} r\cos\theta \cdot r dr$$

- Inderste integral udregnes:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{\sin\theta}^{1+\sin\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left((1+\sin\theta)^3 - \sin^3\theta\right) d\theta$$

- Substitutionen $t = \sin\theta$ giver $dt = \cos\theta d\theta$, så vi får

$$= \quad \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left((1+t)^3 - t^3\right) dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(3t^2 + 3t + 1\right) dt$$

$$= \quad \frac{1}{3}\left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

- Se også udregningerne i Maple-worksheet: Eksempel 0.