Lokalt ekstremum (kort version)
DiploMat 01905

Preben Alsholm
Institut for Matematik, DTU

26. oktober 2004

Definition 1 *Et stationært punkt for en funktion af flere variable f vil i disse noter blive kaldt et* egentligt *saddelpunkt, hvis der eksisterer en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt maksimum og også en ret linie gennem punktet langs hvilken f har egentligt minimum.*

Definition 2 *Lad f være en funktion af n variable. Antag, at f har partielle afledede af anden orden i punktet $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Hessematricen for f i punktet a er den matrix $H(a)$, hvis element (i, j) er*

$$f_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Er f en funktion af 2 variable x og y er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2)$ altså givet ved

$$H(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

Er f en funktion af 3 variable x, y og z er Hessematricen i punktet $a = (a_1, a_2, a_3)$ givet ved

$$H(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) & f_{xz}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) & f_{yz}(a) \\ f_{zx}(a) & f_{zy}(a) & f_{zz}(a) \end{pmatrix}$$

Bemærkning 3 *Hessematricen er opkaldt efter tyskeren Ludwig Otto Hesse, 1811-1874. Da man normalt kan regne med, at de blandede afledede er ens, er Hessematricen altså symmetrisk. Denne kendsgerning er vigtig i det følgende, idet det for en reel symmetrisk matrix gælder, at alle egenværdier er reelle.*

Der gælder nu følgende sætning:

Sætning 4 *Lad f være en funktion af n variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Antag, at a er et stationært punkt for f. Lad $H(a)$ være Hessematricen for f i a. Så gælder*

1. *Hvis egenværdierne for $H(a)$ alle er positive, så er a et egentligt minimumspunkt. Hvis egenværdierne alle er negative, er a et egentligt maksimumspunkt.*
2. *Hvis to af egenværdierne for $H(a)$ har forskellige fortegn, så er a et egentligt saddelpunkt.*
3. *Hvis mindst én af egenværdierne er lig med nul og resten har samme fortegn, så må en nærmere undersøgelse foretages.*

Eksempel 5 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y) = x^2 - x^2y + 2y^2$$

for alle $(x,y) \in R^2$. De partielle afledede af f er givet ved $f_x(x,y) = 2x - 2xy = 2x(1-y)$ og $f_y(x,y) = -x^2 + 4y$. Heraf finder vi, at de stationære punkter er $(0,0)$ og $(\pm 2, 1)$. Vi finder videre

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 - 2y \\ f_{xy}(x,y) &= -2x \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

Hessematricen er altså givet ved

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

I de 3 punkter fås

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for $H(0,0)$ er åbenbart 2 og 4, altså positive, så $(0,0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt. Matricerne $H(2,1)$ og $H(-2,1)$ har de samme egenværdier, nemlig $2 \pm 2\sqrt{5}$.Den ene er dermed positiv, den anden negativ. Punkterne $(\pm 2, 1)$ er egentlige saddelpunkter.

Vi nævner et nyttigt resultat fra Lineær Algebra.

Sætning 6 *Lad $n \times n$-matricen A have egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Så gælder, at*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ Spor(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \end{aligned} \tag{1}$$

hvor vi erindrer om, at sporet for A er defineret *som summen af diagonalelementerne.*

Bemærkning 7 *Se også Lay, Linear Algebra: p. 318, opgave 19 og p. 334, opgave 25 og 26.*

For en funktion af 2 variable kan en egentlig bestemmelse af egenværdierne for Hesse-matricen undgås ved udnyttelse af følgende sætning:

Sætning 8 *Lad f være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede op til og med 2. orden i en omegn om punktet (a,b). Antag, at (a,b) er et stationært punkt for f. Lad $H(a,b)$ være Hessematricen for f i (a,b). Så gælder*

1. *Hvis* $\det(H(a,b)) > 0$*, så er (a,b) et egentligt ekstremumspunkt. Hvis $Spor(H(a,b)) > 0$, så er (a,b) et egentligt minimumspunkt. Hvis $Spor(H(a,b)) < 0$, er (a,b) et egentligt maksimumspunkt.*

2. *Hvis* $\det(H(a,b)) < 0$*, så er (a,b) et egentligt saddelpunkt.*

3. *Hvis* $\det(H(a,b)) = 0$ *må en nærmere undersøgelse foretages.*

Bevis. Ifølge sætning 6 gælder, hvis egenværdierne for $H(a,b)$ er λ_1, λ_2 at

$$\begin{aligned} \det(H(a,b)) &= \lambda_1\lambda_2 \\ \mathit{Spor}(H(a,b)) &= \lambda_1+\lambda_2 \end{aligned}$$

Er determinanten derfor negativ, er punktet et egentligt saddelpunkt.
Er determinanten positiv, har λ_1 og λ_2 samme fortegn, og dermed er punktet et egentligt ekstremum. Fortegnet for λ_1 og λ_2 afgøres derefter af fortegnet for $\lambda_1+\lambda_2 = \mathit{Spor}(H(a,b)) = f_{xx}(a,b)+f_{yy}(a,b)$. ■

Eksempel 9 *Lad f være givet ved*

$$f(x,y) = \left(1+2x+2y-2y^2\right)e^{-x^2-2xy-2y^2}$$

De stationære punkter findes til $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ *og* $\left(-\frac{3}{2},1\right)$. *Hessematricerne er*

$$\begin{aligned} H(-1,0) &= e^{-1}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad H\left(\frac{1}{2},0\right) = e^{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -14 \end{bmatrix} \\ H\left(\frac{1}{2},-1\right) &= e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}, \quad H\left(-\frac{3}{2},1\right) = e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi prøver at bruge Sætning 8. Idet vi udnytter, at for en $n\times n$-matrix A og et tal k gælder, at $\det(kA) = k^n \det A$, *finder vi determinanterne til*

$$\begin{aligned} \det H(-1,0) &= \det\left(e^{-1}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = e^{-2}\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0 \\ \det H\left(\frac{1}{2},0\right) &= \det\left(e^{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -14 \end{bmatrix}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} = 48e^{-\frac{1}{2}} > 0 \\ \det H\left(\frac{1}{2},-1\right) &= \det\left(e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}\right) = e^{-\frac{5}{2}}\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 22 \end{vmatrix} = 32e^{-\frac{5}{2}} > 0 \\ \det H\left(-\frac{3}{2},1\right) &= \det\left(e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = e^{-\frac{5}{2}}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 32e^{-\frac{5}{2}} > 0 \end{aligned}$$

Vi konkluderer, at $(-1,0)$ er et egentligt saddelpunkt, hvorimod de tre andre stationære punkter er egentlige lokale ekstremumspunkter. Sporene for de sidste tre er

$$\begin{aligned} \mathit{Spor}\left(H\left(\frac{1}{2},0\right)\right) &= -20e^{-\frac{1}{4}} < 0, \quad \mathit{Spor}\left(H\left(\frac{1}{2},-1\right)\right) = 28e^{-\frac{5}{4}} > 0 \\ \mathit{Spor}\left(H\left(-\frac{3}{2},1\right)\right) &= 12e^{-\frac{5}{4}} > 0 \end{aligned}$$

så vi konkluderer, at $\left(\frac{1}{2},0\right)$ er et egentligt lokalt maksimumspunkt og punkterne $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ og $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ er egentlige lokale minimumspunkter.
Vi kunne selvfølgelig i stedet have fundet egenværdierne for de 4 matricer.

Eksempel 10 *Lad f være funktionen givet ved*

$$f(x,y,z) = 12\left(y+z^2\right)e^{-x} + 8yz^3 + 5y^4$$

Vi vil bestemme stationære punkter og deres type. Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= -12\left(y+z^2\right)e^{-x} \\ f_y(x,y,z) &= 12e^{-x}+8z^3+20y^3 \\ f_z(x,y,z) &= 24ze^{-x}+24yz^2 \end{aligned}$$

Det eneste stationære punkt er (efter lidt regning - eller ifølge Maple) $(0,-1,1)$. *Vi finder Hessematricen:*

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12\left(y+z^2\right)e^{-x} & -12e^{-x} & -24ze^{-x} \\ -12e^{-x} & 60y^2 & 24z^2 \\ -24ze^{-x} & 24z^2 & 24e^{-x}+48yz \end{pmatrix}$$

I det stationære punkt fås

$$H(0,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 \\ -12 & 60 & 24 \\ -24 & 24 & -24 \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for denne matrix er med 4 betydende cifre $-41.00,\ 5.929$ *og* 71.07. *To er altså positive, en negativ. Punktet er et saddelpunkt. Dette forhold kunne være afgjort uden at finde egenværdierne således. Vi bruger Sætning 6. Vi finder*

$$\begin{aligned} \det(H(0,-1,1)) &= -17280 \\ \mathit{Spor}(H(0,-1,1)) &= 36 \end{aligned}$$

Vi har derfor, at

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -17280 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 36 \end{aligned}$$

Af den første af disse ligninger konkluderes, at en eller tre af egenværdierne er negative. Af den anden følger dernæst, at de ikke alle kan være negative. Altså er netop én egenværdi negativ, og to dermed positive.