Noter om komplekse tal

Preben Alsholm

Januar 2008

1 Den komplekse eksponentialfunktion

Vi erindrer først om den sædvanlige og velkendte reelle eksponentialfunktion. Vi skal undertiden finde det nyttigt, at kalde den exp. Selvfølgelig har vi

$$\exp x = e^x$$

men skrivemåden $\exp x$ har den fordel, at tankerne ledes i retning af funktionsbegrebet: $\exp x$ er eksponentialfunktionen exp anvendt på x, ganske svarende til, at $\sin x$ er sinusfunktionen anvendt på x. Skrivemåden e^x har også fordele, idet det bliver let at huske den fundamentale regel, at $e^{x+y} = e^x e^y$, der jo blot er en af potensreglerne. Vi tænker her på e^x som tallet e opløftet til tallet x. Reglen $e^{x+y} = e^x e^y$ ser således ud, når vi benytter funktionsskrivemåde

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$$

I denne form minder den jo også mere om logaritmereglen

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

hvor gangetegn og additionstegn er byttet om sammenlignet med exp-reglen.

Vi vil nu udvide eksponentialfunktionens definitionsområde fra R til C. Herunder vil den fundamentale exp-regel blive bevaret.

Definition 1 *For $x, y \in R$ sættes*

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

hvor $\exp x$ på højre side er den sædvanlige reelle eksponentialfunktion anvendt på x. Anderledes skrevet:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Bemærkning 2 *Da $\cos y + i \sin y = 1_y$ kan definitionen også skrives $\exp(x+iy) = \exp x \cdot 1_y = (\exp x)_y$. Bemærk specielt til senere brug, at $\exp(iy) = 1_y$.*

Bemærkning 3 *Da vi ikke tidligere har lavet definitioner af, hvad eksponentialfunktionen skulle gøre ved imaginære tal, kan man med en vis ret sige, at vi kan definere, hvad vi vil. Vi må dog kontrollere, om der skulle være mulige konflikter med definitionen i det reelle tilfælde. Vi ønsker jo kun en udvidelse af definitionsområdet, ikke en omdefinition. Sætter vi $y = 0$, bliver tallet $x + iy$ reelt, og $\exp(x+iy)$ bør derfor blot være den sædvanlige eksponentialfunktion anvendt på x. Med $y = 0$ på højre side fås $\exp x \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = \exp x \cdot (1+0) = \exp x$. Der er altså ingen konflikt med tidligere definitioner.*

Man kan med rette spørge, hvorfor den udvidede funktion exp fortjener at blive kaldt en eksponentialfunktion. Svaret er, at den fundamentale exp-regel stadig gælder:

Sætning 4 *For alle $z_1, z_2 \in C$ gælder*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

eller anderledes skrevet

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Bevis. Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, hvor $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$, så har vi, idet vi flere gange udnytter, at $\exp(x + iy) = (\exp x)_y$:

$$\begin{aligned}
\exp z_1 \cdot \exp z_2 &= \exp(x_1 + iy_1) \cdot \exp(x_2 + iy_2) \\
&= (\exp x_1)_{y_1} \cdot (\exp x_2)_{y_2} = (\exp x_1 \cdot \exp x_2)_{y_1+y_2} \\
&= (\exp(x_1 + x_2))_{y_1+y_2} = \exp(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) \\
&= \exp(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

■

Bemærkning 5 *Som tidligere bemærket, har vi for $v \in R$, at $\exp(iv) = 1_v$. Dette betyder, at vi nu kan sige farvel til skrivemåden r_v, idet vi har*

$$r_v = r \cdot 1_v = r \exp(iv) = re^{iv}$$

Vi vil i fremtiden sige om et tal af formen re^{iv}, hvor $r \geq 0$ og $v \in R$, at det er på polær form.

Eksempel 6 *Den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$ er $2\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right)$, idet modulus er $\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. (For at indse dette, kan man indtegne tallet i den komplekse plan og ræsonnere på en passende trekant, en 30-60-trekant.)*

Sætning 7 *Moivre's formel. For $n \in N$ og $x \in R$ gælder*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Bevis. Vi har $(\cos x + i\sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$. ■

Formlen skyldes franskmanden Abraham de Moivre (1667-1754).

Eksempel 8 *Lad $x \in R$. Vi vil finde en formel, der udtrykker $\cos 3x$ ved $\cos x$ (og $\sin x$ om nødvendigt). Vi udnytter, at $\cos 3x = \operatorname{Re} e^{i3x}$ og finder*

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \operatorname{Re} e^{i3x} = \operatorname{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x\right) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

2 Rødder i polynomier

2.1 Den binome ligning

Et polynomium er et udtryk med mange led (*poly* kommer af græsk og betyder mange). Et binomium er et udtryk med to led. En binom ligning er en ligning af formen

$$z^n = a$$

hvor $n \in N$ og $a \in C$. Vi ønsker at løse denne ligning for den ubekendte z. Denne opgave kan også formuleres således: Vi ønsker at bestemme samtlige komplekse n'te rødder af a. Ved en kompleks n'te rod af a vil vi forstå et tal som opløftet til n'te giver a.

Bemærkning 9 *Det skal vise sig, at antallet af komplekse n'te rødder af et tal a altid er n, når undtages $a = 0$, der kun har én n'te rod, nemlig 0. Man bør derfor være varsom ved brugen af rodtegn til angivelse af en rod. Vær opmærksom på, at det er en strengt overholdt konvention, at hvis $a \in R_+$,så betyder $\sqrt[n]{a}$ dét positive reelle tal, der opløftet til n'te, giver a. Eksempelvis har ligningen $z^2 = 2$ to løsninger, den ene er $\sqrt{2}$, den anden er $-\sqrt{2}$. Den første af disse er positiv (og lig med ca. 1.4142), den anden negativ. Men begge kan betragtes som komplekse kvadratrødder af 2.*

Sætning 10 *Rødderne i den binome ligning $z^n = a$, hvor $a = re^{iv}, r \geq 0, v \in R$, er givet ved*

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Bevis. Vi skriver også den ubekendte z på polær form $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in R$. Ved indsættelse af $z = \rho e^{i\theta}$ og $a = re^{iv}$ i ligningen $z^n = a$, fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{iv}$$

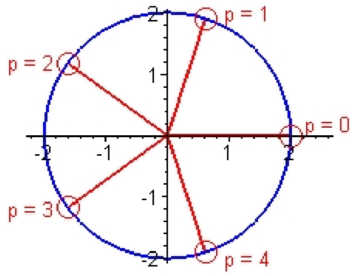
Ved brug af sædvanlige regneregler (der jo gælder!) fås

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{iv}$$

De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p2\pi$, hvor $p \in Z$. Da $\rho \geq 0$ fås heraf, at $\rho = \sqrt[n]{r}$, hvor rodtegnet angiver den konventionelle positive rod af et positivt tal. Desuden finder vi, at $\theta = \frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}$. Bemærk, at vi kun behøver betragte $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, idet flere p-værdier blot vil give θ-værdier, der afviger fra en allerede betragtet θ-værdi med et multiplum af 2π. ∎

Man bør specielt bemærke, at samtlige rødder i den binome ligning $z^n = a = re^{iv}$ har modulus $\sqrt[n]{r}$ og således i den komplekse plan ligger på en cirkel med denne radius og centrum i 0. Desuden bemærker man, at to på hinanden følgende rødder har argumenter, der afviger fra hinanden med $\frac{2\pi}{n}$. Rødderne er altså jævnt fordelt på den omtalte cirkel. Har man fundet én rod, så er de andre let placeret.

Eksempel 11 *Vi vil løse ligningen $z^5 = 32$. Vi bemærker, at én rod kan gættes, nemlig 2 Men ligningen er jo binom, så de andre 4 rødder ligger derfor på en cirkel med radius 2 (og centrum i 0). To på hinanden følgende rødder ligger desuden på cirklen i en vinkelafstand på $\frac{2\pi}{5}$. Vi kan altså indtegne røddernes placering i den komplekse plan før vi overhovedet har fundet et udtryk for mere end én af dem.*



Rødderne i $z^5 = 32$

For at finde et udtryk for rødderne bruger vi formlen ovenfor og finder

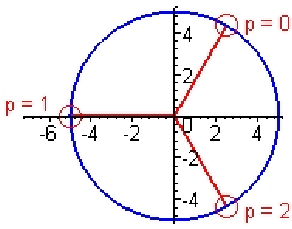
$$\begin{aligned} z &= 2\exp\left(i\left(\frac{0}{5}+p\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2e^{ip\frac{2\pi}{5}} \\ &= 2\left(\cos\left(p\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(p\frac{2\pi}{5}\right)\right) \end{aligned}$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. *Idet vi nummererer rødderne efter deres p-værdier finder vi*

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \\ z_1 &= 2e^{i\frac{2\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ z_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ z_3 &= 2e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \overline{z_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ z_4 &= 2e^{i\frac{8\pi}{5}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{z_1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Som det ses er det let at finde rødderne på polær form, hvorimod det ikke altid er let at finde eksakte værdier for den tilsvarende rektangulære form. Vi har brugt Maple i dette tilfælde.

Eksempel 12 *Find de 3 komplekse tredierødder af* -125. *Anderledes sagt: Løs den binome ligning* $z^3 = -125$. *Én løsning er åbenbart* -5, *de to andre ligger på en cirkel med radius* 5 *og centrum i* 0. *Rødderne ligger i en vinkelafstand fra hinanden på* $\frac{2\pi}{3}$. *For hurtigt at finde et udtryk for rødderne laves en figur og der ræsonneres på en passende valgt trekant (en 30-60-trekant). Man finder, at de to andre rødder er* $\frac{5}{2} \pm i\frac{5}{2}\sqrt{3}$.



Rødderne i $z^3 = -125$

Bemærkning 13 *Man bør hér bemærke, at beder man Maple om* $(-125)\hat{}(1/3)$, *så får man roden* $\frac{5}{2}+i\frac{5}{2}\sqrt{3}$. *Vil man have* -5, *skal man bede om surd(−125, 3); Selvfølgelig kan man bare bede Maple om at løse ligningen vha.* solve. *Da ligningen er polynomial, fås samtlige 3 rødder.*

Eksempel 14 *Komplekse kvadratrødder får man let styr på. Der er jo kun 2, og de ligger jævnt fordelt på en cirkel. Så hvis den ene rod er* $x+iy$, *så må den anden være* $-x-iy$. *Vi prøver at løse ligningen* $z^2=-4i$. *Bruges formlen, skrives først* $-4i=4e^{-i\frac{\pi}{2}}$. *Herefter har vi*

$$z=2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+p\pi\right)}$$

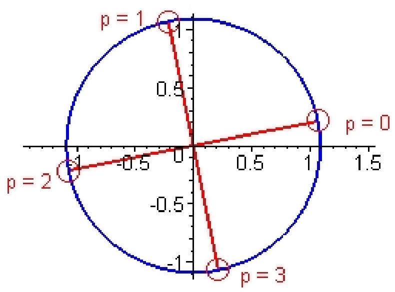
hvor $p=0,1$. *Løsningerne er altså*

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ z_1 &= -z_0=-\sqrt{2}+i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Eksempel 15 *Lad os løse ligningen* $z^4=1+i$, *og nøjes med at give løsningerne på polær form. (Der er god grund til denne nøjsomhed!). Vi har* $|1+i|=\sqrt{2}$*og* $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$, *så løsningerne er givet ved*

$$z=\sqrt[8]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{16}+p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

hvor $p=0,1,2,3$. *Rødderne ligger på en cirkel med radius* $\sqrt[8]{2}$, *og de deler cirkelbuen i 4 lige store stykker. Den ene af rødderne ligger i første kvadrant i en vinkelafstand fra x-aksen på* $\frac{\pi}{16}$.



Rødderne i $z^4=1+i$

2.2 Andengradsligningen

Betragt andengradsligningen

$$az^2+bz+c=0$$

hvor $a,b,c\in C$, og $a\neq 0$. Vi vil vise, at ligningen kan løses på sædvanlig vis. Omskriv venstresiden således:

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Løsningerne til andengradsligningen opfylder derfor følgende ligning

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

som vi kan anse for binom, hvis vi midlertidigt opfatter $w=z+\frac{b}{2a}$ som den ubekendte. Den binome ligning

$$w^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

har som enhver anden binom ligning af anden grad 2 løsninger, nemlig de 2 komplekse kvadratrødder af $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, som vi kan skrive på formen $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. Altså kan løsningerne til andengradsligningen skrives

$$z=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

der også kan skrives på den traditionelle form

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Hvilke af de to komplekse kvadratrødder $\sqrt{b^2-4ac}$ refererer til, behøver vi ikke tage stilling til, da vi med $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ jo skal have dem begge.

Eksempel 16 *Vi løser ligningen $z^2-2z+(1+i)=0$. Vi finder*

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4\,(1+i)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4i}}{2}$$

I et tidligere eksempel har vi imidlertid løst den binome ligning $w^2=-4i$, dvs. fundet de to komplekse kvadratrødder $\pm\sqrt{-4i}$. Resultatet var $\pm\sqrt{-4i}=\pm\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$. Altså finder vi

$$z=\frac{2\pm\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1-i)=\begin{cases}1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\\1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Eksempel 17 *Vi vil løse ligningen $z^2+z+1=0$. Vi finder*

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

idet de to løsninger til den binome ligning $w^2=-3$ er $w=\pm i\sqrt{3}$.

2.3 Polynomier generelt

Et polynomium i den variable z er et udtryk af formen

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

hvor *koefficienterne* $a_0,a_1,\ldots,a_n$ er tal (i dette afsnit komplekse). Bemærk, at eksponenterne til z alle er ikke-negative hele tal. Hvis $a_n\neq 0$, vil vi kalde a_n for *den ledende koefficient*, og sige at polynomiets *grad* er n. Et polynomium af 0'te grad er blot et tal $a_0\neq 0$. Nulpolynomiet er blot udtrykket 0. Når det overhovedet tillægges en grad, siger man at den er $-\infty$.

Eksempel 18 *Udtrykkene* $2z^3 - z + 11$, $-\pi z^6 + 5z^5 + (5+3i)\, z^2 + z$ *og* 7 *er polynomier i den variable* z *af grader henholdsvis 3, 6 og 0. Udtrykkene* $4z^{-2}+6z^{-1}-8+z+\frac{1}{2}z^2$ *og* $5z^{\frac{3}{2}}-z^{\frac{1}{2}}$ *er* ***ikke*** *polynomier i den variable* z*. Et udtryk med uendeligt mange led som* $1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^k+\ldots$ *er ikke et polynomium, men kaldes en uendelig række.*

Vi skal i dette afsnit behandle rødder i polynomier. I det foregående afsnit viste vi, at den sædvanlige formel til bestemmelse af rødderne i et andengradspolynomium stadig gælder, når blot kvadratroden tolkes som bestemmelse af en kompleks kvadratrod. Der findes også formler til bestemmelse af rødderne i et tredie- og fjerdegradspolynomium. Disse formler er ret komplicerede og kan ikke generelt anbefales brugt. Det interessante er imidlertid, at formlerne overhovedet findes. Det kan nemlig vises, at rødderne i et polynomium af femte eller højere grad ikke generelt kan udtrykkes ved brug af endeligt mange af følgende symboler: De naturlige tal N, polynomiets koefficienter, $+, -, /$ og rodtegn. Dette resultat går tilbage til 1826 og skyldes nordmanden Niels Henrik Abel (1802-29). Påstanden om manglen på formler skal ikke overfortolkes. Husk, at bestemmelsen af rødderne i polynomiet $z^n - a$ jo blot er bestemmelsen af samtlige n'te rødder af a. Franskmanden Evariste Galois (1811-32) gav et kriterium for, om rødderne i et givet polynomium kan udtrykkes ved rodtegn.

På trods af manglen på formler for rødderne i et generelt polynomium af grad ≥ 5 har disse polynomier rødder indenfor C. Der gælder nemlig følgende sætning, der går tilbage til Carl Friedrich Gauss (1777-1855):

Sætning 19 ***Algebraens Fundamentalsætning****. Ethvert polynomium af grad* ≥ 1 *har mindst én rod indenfor de komplekse tal.*

Bevis. Beviset er indviklet, hvis det skal føres uden forudgående kendskab til kompleks funktionsteori. Vi vil ikke give noget bevis hér. ■

Definition 20 *Et tal* $z_1 \in C$ *som er rod i polynomiet* p *siges at have multipliciteten* $k \in N$*, hvis* $p(z) = (z - z_1)^k\, q(z)$*, hvor* $q(z)$ *er et polynomium og hvor* z_1 *ikke er rod i* $q(z)$*. Hvis multipliciteten er 1, siges roden at være simpel.*

Eksempel 21 *Polynomiet* $5z^4 - 50z^3 + 120z^2 + 160z - 640$ *kan faktoriseres til* $5\,(z+2)\,(z-4)^3$*. Vi ser derfor, at* 4 *rod af multiplicitet 3, og* -2 *er rod af multiplicitet 1.* -2 *er altså en simpel rod.*