Noter til Matematik 1

Preben Alsholm

Oktober 1999

0.1 Forord

Disse forelæsningsnoter er skrevet til brug ved undervisningen i Matematik 1 for diplomingeniørstuderende i kemi og for levnedsmiddelingeniørstuderende.

Hvis man ikke selv har valgt den lærebog, som man benytter i undervisningen, kan det ikke undgås, at man undertiden finder, at lærebogens behandling af et emne kunne være bedre. Noterne er skrevet, fordi det er min erfaring, at afviger forelæseren fra lærebogen i et for studenten på det givne tidspunkt uoverskueligt omfang, så begynder studenten at tage noter. Dette betyder, at han ikke hører så godt efter og har nedsat mulighed har for at forstå det sagte eller det på tavlen skrevne. Har studenten derimod noter, som forelæseren helt klart følger (evt. dog med overspringelser), så kan notetagningen indskrænkes betydeligt, og muligheden for at forstå det, der skrives på tavlen, forøges. Det er ikke tanken, at disse noter skal erstatte lærebogen, men kun de noter, som studenten selv ville tage.

Noterne indeholder mere stof end tiden tillader gennemgang af, også mere stof end pensum til eksamen

Kapitel 1

Komplekse tal

1.1 Talmængder og regneregler for tal

Regning med reelle tal foregår efter visse regler. Ved udvidelsen af de reelle tal til de komplekse tal vil vi insistere på, at disse regneregler bevares. De regneregler, der gælder indenfor de reelle tal er følgende:

$$a + b = b + a \quad \text{(den kommutative lov for addition)} \tag{1.1}$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(den associative lov for addition)} \tag{1.2}$$
$$ab = ba \quad \text{(den kommutative lov for multiplikation)} \tag{1.3}$$
$$(ab)\,c = a\,(bc) \quad \text{(den associative lov for multiplikation)} \tag{1.4}$$
$$a\,(b + c) = ab + ac \quad \text{(den distributive lov)} \tag{1.5}$$
$$a + 0 = a \tag{1.6}$$
$$1a = a \tag{1.7}$$
$$a + x = 0 \quad \text{har en løsning for } x \tag{1.8}$$
$$ax = 1 \quad \text{har en løsning for } x, \quad \text{når } a \neq 0 \tag{1.9}$$
$$\text{Enhver opadtil begrænset talmængde har et supremum} \tag{1.10}$$

Med supremum menes mindste overtal, altså mindste tal, der er større end eller lig tallene i den givne mængde.

1.1.1 Talmængder

Indenfor matematikken optræder der forskellige klasser af tal:
N er mængden af naturlige tal, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
Z er mængden af hele tal $\ldots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
Q er mængden af rationale tal, d.v.s. brøker og hele tal.

R er mængden af reelle tal, der sædvanligvis identificeres med mængden af punkter på en tallinie.

C er mængden af komplekse tal, hvorom dette skal handle.

Vi har

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

N har egenskaberne $1-5, 7, 10$. Z har egenskaberne $1-8, 10$. Q har egenskaberne $1-9$. R har egenskaberne $1-10$. C har egenskaberne $1-9$ samt den yderlige egenskab, at ethvert polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod.

1.2 Beskrivelse af de komplekse tal

C skal være mængden af punkter i planen. Med et koordinatsystem indlagt, identificeres et punkt med et talpar, så vi kan sige, at $C = R^2$. Desuden ønsker vi selvfølgelig at indføre en addition og en multiplikation.

Definition 1 *Komplekse tal (punkter i planen) adderes som deres stedvektorer.*

Bemærkning 2 *Hermed agerer det komplekse tal* $(0, 0)$ *som et nulelement, d.v.s.* $(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2)$ *for alle* $(a_1, a_2) \in C$.

Definition 3 ***(Polære koordinater)*** *Modulus for et kompleks tal* a *er punktets afstand fra begyndelsespunktet* O. *Betegnelse* $|a|$. *Vinklen fra* x*-aksen til linien fra* O *til* a *betegnes argumentet for* a, *notation:* $\arg(a)$. *Dette regnes med fortegn. Argumentet er dog mangetydigt. Hvis* v *er et argument for* a, *så er også* $v + p2\pi, p \in Z$, *et argument for* a. *Med hovedargumentet (* $Arg(a)$ *) menes det argument, der ligger i intervallet* $]-\pi, \pi]$. *Vi skal midlertidigt benytte skrivemåden* $a = r_v$ *når* $r = |a|$, *og* v *er et argument for* a.

Bemærkning 4 *Idet vi udnytter, at* $a = r_v$ *ligger på en cirkel med radius* r *(og centrum i* $(0, 0)$ *) og i retningen givet ved vinklen* v, *har vi åbenbart følgende formel*

$$a = r_v = (r \cos v, r \sin v)$$

Definition 5 *Lad* $a = r_v$ *og* $b = \rho_\theta$. *Produktet* ab *er det punkt i planen, hvis modulus er* $r\rho$ *og hvis argument er* $v + \theta$, *altså*

$$r_v \rho_\theta = (r\rho)_{v+\theta}$$

Bemærkning 6 *På grund af argumentets mangetydighed bør man overveje, om produktet er veldefineret.*

Bemærkning 7 *Med denne definition agerer det komplekse tal* $(1, 0)$ *som et ét-element, d.v.s.* $(1, 0) \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$ *for alle* $(a_1, a_2) \in C$. *Dette følger af, at* $(1, 0) = 1_0$.

Bemærkning 8 *Som en konsekvens af definitionen af multiplikationen har vi for alle* $n \in N$, *at*

$$(r_v)^n = (r^n)_{nv}$$

Eksempel 9 *Lad* $a = \left(1, \sqrt{3}\right)$ *og* $b = (-2, 2)$. *Vi vil finde produktet ab. Vi finder* $|a| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$. *Argumentet findes allerbedst ved at indtegne punktet a i den komplekse plan og så udnytte ens kendskab til trekantsberegning. Vi finder* $\arg a = \frac{\pi}{3}$. *På samme måde findes* $|b| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ *og* $\arg(b) = \frac{3\pi}{4}$. *Altså fås*

$$\begin{aligned} ab &= \left(2\sqrt{2} \cdot 2\right)_{\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}} = \left(4\sqrt{2}\right)_{\frac{13}{12}\pi} \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right), \sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= \left(-2 - 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Eksempel 10 *Sæt* $i = (0, 1)$. *Vi vil finde* i^2. *Vi har* $|i| = 1$ *og* $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$. *Derfor fås*

$$i^2 = \left(1^2\right)_{2\frac{\pi}{2}} = 1_\pi = (-1, 0)$$

Sætning 11 *Den delmængde af de komplekse tal, der ligger på førsteaksen, altså* $\mathcal{R} = \{(x, 0) \,|x \in R\}$, *kan opfattes som en kopi af R ved afbildingen* $x \longmapsto (x, 0)$. *Vi har nemlig, at* $\mathcal{R}$ *er invariant under addition og multiplikation, d.v.s. at hvis* $a, b \in \mathcal{R}$, *så gælder også, at* $a + b \in \mathcal{R}$ *og* $ab \in \mathcal{R}$. *Desuden har vi, at*

$$(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$$

og også, at

$$(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$$

Det komplekse tal $(1, 0)$ *agerer ét-tal, og det komplekse tal* $(0, 0)$ *agerer nul.*

Bevis. *Udsagnene vedrørende addition er en umiddelbar følge af definitionen af denne som stedvektoraddition. For at bevise udsagnene om multiplikationen må vi bruge polær repræsentation. Lad* $a = (a_1, 0)$ *og* $b = (b_1, 0)$. *Antager vi først, at* $a_1, b_1 \geq 0$, *så har vi* $a = (a_1)_0$ *og* $b = (b_1)_0$, *således at* $ab = (a_1 b_1)_{0+0} = (a_1 b_1)_0 = (a_1 b_1, 0)$. *Antag dernæst, at* $a_1 \geq 0$ *og* $b_1 < 0$. *Så har vi* $a = (a_1)_0$ *og* $b = (|b_1|)_\pi$, *således at* $ab = (a_1 |b_1|)_{0+\pi} = (a_1 |b_1|)_\pi = (-a_1 |b_1|, 0) = (a_1 b_1, 0)$. *Vi bør også undersøge det tilfælde, hvor* $a_1, b_1 < 0$. *Så har vi* $a = (|a_1|)_\pi$ *og* $b = (|b_1|)_\pi$, *således at* $ab = (|a_1| |b_1|)_{\pi+\pi} = (|a_1| |b_1|)_{2\pi} = (|a_1| |b_1|, 0) = (a_1 b_1, 0)$. *At* $(1, 0)$ *agerer ét-tal i* $\mathcal{R}$ *og at* $(0, 0)$ *agerer nul i* $\mathcal{R}$ *følger af, at de allerede gør det i C. Hermed er sætningen vist.* ■

Sætning 12 *Regnereglerne* $1 - 9$ *er opfyldt, når* 0 *opfattes som* $(0, 0)$ *og* 1 *opfattes som* $(1, 0)$.

Bevis. *At regnereglerne* $1 - 4$ *og* $6 - 8$ *gælder, kræver ikke dybe overvejelser. Den distributive lov* (5) *bevises lettest geometrisk. Se evt. lærebogen. Regel* (9), *at ligningen* $ax = (1,0)$ *har en løsning, når* $a \neq (0,0)$ *vises således. Lad* $a = r_v$, *og sæt* $x = \rho_\theta$. *Vi har* $r > 0$, *da* $a \neq (0,0)$. *Vi skal løse*

$$r_v \rho_\theta = (1,0) = 1_0$$

for de ubekendte ρ *og* θ. *Da* $r_v \rho_\theta = (r\rho)_{v+\theta}$ *finder vi* $(r\rho)_{v+\theta} = 1_0$, *således at* $r\rho = 1$ *og* $v + \theta = 0 + p2\pi, p \in Z$. *Altså* $\rho = \frac{1}{r} = r^{-1}$, *og* $\theta = -v + p2\pi$. *Altså er* $x = \left(r^{-1}\right)_{-v}$.

Sætning 13 *Ethvert komplekst tal* $a = (a_1, a_2)$ *kan skrives på formen*

$$a = (a_1, 0) + i\,(a_2, 0)$$

når $i = (0,1)$.

■

Bevis. *Da* $a = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$ *skal vi blot vise, at* $i\,(a_2, 0) = (0, a_2)$. *Vi har, når* $a_2 \geq 0$

$$i\,(a_2, 0) = 1_{\frac{\pi}{2}}\,(a_2)_0 = (a_2)_{\frac{\pi}{2}} = (0, a_2)$$

Når $a_2 < 0$, *har vi tilsvarende*

$$i\,(a_2, 0) = 1_{\frac{\pi}{2}}\,(|a_2|)_\pi = (|a_2|)_{\frac{3\pi}{2}} = (0, -|a_2|) = (0, a_2)$$

■

Bemærkning 14 *Da tallene på førsteaksen* $\mathcal{R}$ *kan opfattes som en kopi af* R, *vil vi i det følgende tillade os at identificere* $\mathcal{R}$ *med* R. *Vi vil ophøre med at skrive* $(a_1, 0)$, *men vil blot skrive* a_1. *Her med får ovenstående sætning følgende formulering: Ethvert komplekst tal* a *kan skrives på formen* $a = a_1 + ia_2$, *hvor* $a_1, a_2 \in R$. *Denne form (rektangulær form) bruges overalt i det følgende i stedet for* $a = (a_1, a_2)$.

Bemærkning 15 *Vi beregnede tidligere* i^2. *Resultatet kan nu formuleres således:* $i^2 = -1$. *Ligningen* $z^2 + 1 = 0$ *har de to løsninger* i *og* $-i$.

Bemærkning 16 *Med den nye skrivemåde har vi* $r_v = r\cos v + ri\sin v = r\,(\cos v + i\sin v)$.

Bemærkning 17 *Mange beregninger kan nu udføres meget simpelt, hvis blot man bruger regnereglerne samt husker, at* $i^2 = -1$.

Eksempel 18 *Addition:* $(2 + 3i) + (-4 + 7i) = (2 + (-4)) + (3i + 7i) = -2 + 10i$.

Multiplikation: $(2 + 3i)(-4 + 7i) = 2(-4) + 3i \cdot 7i + 2 \cdot 7i + 3i(-4) = -8 - 21 + 14i - 12i = -29 + 2i$.

Division: Her bruges et simpelt trick:

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{-4+7i} &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4+7i)(-4-7i)} = \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4)^2 - (7i)^2} \\ &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{16+49} = \frac{13-26i}{65} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

Definition 19 *Lad $a = a_1 + ia_2$, hvor $a_1, a_2 \in R$. Tallet a_1 kaldes realdelen af a, med symboler: $a_1 = \mathrm{Re}\, a$. Tallet a_2 kaldes imaginærdelen af a, med symboler: $a_2 = \mathrm{Im}\, a$. Den kompleks konjugerede af af a er det komplekse tal $a_1 - ia_2$, og det betegnes med $\overline{a}$, altså $\overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$. Førsteaksen kaldes den reelle akse, andenaksen kaldes den imaginære akse. Tallet a kaldes imaginært, hvis $\mathrm{Im}\, a \neq 0$. Det kaldes rent imaginært, hvis yderligere $\mathrm{Re}\, a = 0$.*

Bemærkning 20 *Det følger af definitionen, at $\overline{r_v} = r_{-v}$.*

Sætning 21 *Lad a og b være komplekse tal. Så gælder*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(a+b) &= \mathrm{Re}\, a + \mathrm{Re}\, b \\ \mathrm{Im}\,(a+b) &= \mathrm{Im}\, a + \mathrm{Im}\, b \\ \overline{a+b} &= \overline{a} + \overline{b} \\ \overline{(ab)} &= \overline{a}\overline{b} \end{aligned}$$

Bevis. De tre første påstande er meget lette at vise. Den sidste kan f.eks. vises således, idet $a = r_v$ og $b = \rho_\theta$ (jvnf. bemærkningen ovenfor):

$$\overline{(ab)} = \overline{(r_v \rho_\theta)} = \overline{(r\rho)_{v+\theta}} = (r\rho)_{-v-\theta} = r_{-v}\rho_{-\theta} = \overline{a}\overline{b}$$

■

Bemærkning 22 *Indenfor de reelle tal findes (som bekendt) en ordning $<$, der opfylder følgende krav: For hver to forskellige tal a, b gælder enten $a < b$ eller $b < a$ (ikke begge). Desuden gælder for alle a, b, c:*

$$\begin{aligned} a &< b \wedge b < c \Longrightarrow a < c \\ a &< b \Longrightarrow a + c < b + c \\ a &< b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc \end{aligned}$$

Her betyder $c > 0$ selvfølgelig $0 < c$. En sådan ordning kan ikke indføres indenfor de komplekse tal. Antag nemlig en sådan ordning eksisterede. Så ville enten $0 < i$ eller $i < 0$. Hvis $0 < i$, så er ifølge sidste krav ovenfor også $0 < i^2$ (tag $a = 0$ og $b = c = i$). Da $i^2 = -1$, har vi hermed, at $0 < -1$. Dette ville ved samme regel medføre, at $0 < (-1)^2 = 1$. Men af midterste regel og $0 < -1$ følger ved addition af 1, at $1 < 0$. Vi har nu både $0 < 1$ og $1 < 0$, i modstrid med kravet om, at kun én af disse må gælde.

1.3 Den komplekse eksponentialfunktion

Vi erindrer først om den sædvanlige og velkendte reelle eksponentialfunktion. Vi skal undertiden finde det nyttigt, at kalde den exp. Selvfølgelig har vi

$$\exp x = e^x$$

men skrivemåden $\exp x$ har den fordel, at tankerne ledes i retning af funktionsbegrebet: $\exp x$ er eksponentialfunktionen exp anvendt på x,ganske svarende til, at $\sin x$ er sinusfunktionen anvendt på x. Skrivemåden e^x har også fordele, idet det bliver let at huske den fundamentale regel, at $e^{x+y} = e^x e^y$, der jo blot er en af potensreglerne. Vi tænker her på e^x som tallet e opløftet til tallet x. Reglen $e^{x+y} = e^x e^y$ ser således ud, når vi benytter funktionsskrivemåde

$$\exp{(x + y)} = \exp x \cdot \exp y$$

I denne form minder den jo også mere om logaritmereglen

$$\ln{(xy)} = \ln x + \ln y$$

hvor gangetegn og additionstegn er byttet om sammenlignet med exp-reglen.

Vi vil nu udvide eksponentialfunktionens definitionsområde fra R til C. Herunder vil den fundamentale exp-regel blive bevaret.

Definition 23 *For $x, y \in R$ sættes*

$$\exp{(x + iy)} = \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

hvor $\exp x$ på højre side er den sædvanlige reelle eksponentialfunktion anvendt på x.

Bemærkning 24 *Da $\cos y + i \sin y = 1_y$ kan definitionen også skrives $\exp{(x + iy)} = \exp x \cdot 1_y = (\exp x)_y$. Bemærk specielt til senere brug, at exp$(iy) = 1_y$.*

Bemærkning 25 *Da vi ikke tidligere har lavet definitioner af, hvad eksponentialfunktionen skulle gøre ved imaginære tal, kan man med en vis ret sige, at vi kan definere, hvad vi vil. Vi må dog kontrollere, om der skulle være mulige konflikter med definitionen i det reelle tilfælde. Vi ønsker jo kun en udvidelse af definitionsområdet, ikke en omdefinition. Sætter vi $y = 0$, bliver tallet $x+iy$ reelt, og $\exp{(x + iy)}$ bør derfor blot være den sædvanlige eksponentialfunktion anvendt på x. Med $y = 0$ på højre side fås $\exp x \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = \exp x \cdot (1 + 0) = \exp x$. Der er altså ingen konflikt med tidligere definitioner.*

Man kan med rette spørge, hvorfor den udvidede funktion exp fortjener at blive kaldt en eksponentialfunktion. Svaret er, at den fundamentale exp-regel stadig gælder:

Sætning 26 *For alle $z_1, z_2 \in C$ gælder*

$$\exp{(z_1 + z_2)} = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

eller anderledes skrevet

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Bevis. Sæt $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, hvor $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$, så har vi, idet vi flere gange udnytter, at $\exp(x+iy) = (\exp x)_y$:

$$\begin{aligned}
\exp z_1 \cdot \exp z_2 &= \exp(x_1 + iy_1)\exp(x_2 + iy_2) \\
&= (\exp x_1)_{y_1} (\exp x_2)_{y_2} = (\exp x_1 \exp x_2)_{y_1+y_2} \\
&= (\exp(x_1 + x_2))_{y_1+y_2} = \exp(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) \\
&= \exp(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

■

Bemærkning 27 *Som tidligere bemærket, har vi for $v \in R$, at $\exp(iv) = 1_v$. Dette betyder, at vi nu kan sige farvel til skrivemåden r_v, idet vi har*

$$r_v = r \cdot 1_v = r \exp(iv) = re^{iv}$$

Vi vil i fremtiden sige om et tal af formen re^{iv}, hvor $r \geq 0$ og $v \in R$, at det er på polær form.

Eksempel 28 *Den polære form for tallet $-\sqrt{3} - i$ er $2\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right)$, idet modulus er $\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ og et argument er $-\frac{5\pi}{6}$. (For at indse dette, indtegn tallet i den komplekse plan og ræsonnér på en passende trekant.)*

Sætning 29 *Moivre's formel. For $n \in N$ og $x \in R$ gælder*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Bevis. Vi har $(\cos x + i\sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$. ■
Formlen skyldes franskmanden Abraham de Moivre (1667-1754).

Eksempel 30 *Lad $x \in R$. Vi vil finde en formel, der udtrykker $\cos 3x$ ved $\cos x$ (og $\sin x$ om nødvendigt). Vi udnytter, at $\cos 3x = \operatorname{Re} e^{i3x}$ og finder*

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \operatorname{Re} e^{i3x} = \operatorname{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x\right) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

1.3.1 Den komplekse logaritmefunktion

Når nu den reelle eksponentialfunktion har en omvendt funktion, nemlig logaritmefunktionen, hvad så med den komplekse eksponentialfunktion, har den en omvendt, og er denne en slags kompleks logaritmefunktion? Svaret er, at den komplekse eksponentialfunktion ikke har en omvendt funktion, men at der alligevel er noget, der kaldes en kompleks logaritmefunktion. Den komplekse eksponentialfunktion har ingen omvendt funktion, da den ikke er injektiv, d.v.s. ikke en-entydig, Vi har jo for alle $z \in C$ og $p \in Z$, at

$$\exp(z + ip2\pi) = \exp z \exp(ip2\pi) = \exp z \cdot (\cos(p2\pi) + i \sin(p2\pi)) = \exp z$$

Ikke desto mindre defineres en kompleks logaritme som følger:

Definition 31 *Lad $z \in C$. Et tal $w \in C$, der opfylder $\exp w = z$, kaldes en logaritme til z, og betegnes med $\ln z$.*

Sætning 32 *Lad $z \in C$ og antag, at $z \neq 0$. Så har z følgende logaritmer*

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + p2\pi) = \ln|z| + i \arg z + ip2\pi$$

hvor $p \in Z$, og $\arg z$ er et vilkårligt argument for z. Bemærk, at to forskellige logaritmer afviger fra hinanden med et helt multiplum af $2\pi i$. Tallet 0 har ingen logaritme.

Bevis. Vi skal løse ligningen $\exp w = z$ for w. Vi sætter $w = w_1 + iw_2$og $z = re^{iv}$, hvor $r > 0$ og $v \in R$. Så har vi altså

$$e^{w_1} e^{iw_2} = e^{w_1 + iw_2} = \exp(w_1 + iw_2) = \exp w = z = re^{iv}$$

Yderste højre og yderste venstre side er begge polære former for sammme tal, så vi har

$$e^{w_1} = r, \quad w_2 = v + p2\pi, p \in Z$$

men hermed har vi $w_1 = \ln r = \ln|z|$, således at $w = w_1 + iw_2 = \ln|z| + i(v + p2\pi) = \ln|z| + i(\arg z + p2\pi)$.

At tallet 0 ingen logaritme har følger af ovenstående regninger, idet vi nu har $r = 0$, således at vi nu skal løse ligningen $e^{w_1} = r = 0$ for det reelle tal w_1. Men for reelle tal w_1 er $e^{w_1} > 0$. ∎

Eksempel 33 *Vi vil finde samtlige logaritmer til tallet $a = \sqrt{3} - i$. Da $|a| = 2$ og $\arg a = -\frac{\pi}{6}$ fås (med $p \in Z$):*

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6} + p2\pi i$$

Eksempel 34 *Samtlige logaritmer til det negative tal -5 er givet ved $\ln(-5) = \ln 5 + i\pi + p2\pi i$, hvor $p \in Z$.*

Bemærkning 35 *Hovedlogaritmen til $z \in C \setminus \{0\}$ defineres som den logaritme, der svarer til at man bruger hovedargumentet:*

$$Ln(z) = \ln|z| + iArg(z)$$

Eksempel 36 *Vi har $Ln\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{6}$ og $Ln(-5) = \ln 5 + i\pi$*

Bemærkning 37 *I en integraltabel (Schaum) findes følgende formel*

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln (ax+b)$$

Det siger sig selv, at der underforstås, at $a \neq 0$. Accepterer man kun reelle tal, må man enten forudsætte, at $ax+b>0$ eller rette formlen til

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

Accepterer man forekomsten af imaginære tal, vil man ikke generes af tabellens svar, når $ax+b<0$, idet de to svar $\frac{1}{a}\ln(ax+b)$ og $\frac{1}{a}\ln|ax+b|$ blot afviger fra hinanden med konstanten $\frac{i\pi}{a}$. Computeralgebraprogrammer som Maple og Mathematica gør uhæmmet brug af komplekse tal og funktioner, herunder den komplekse logaritme.

1.4 Rødder i polynomier

1.4.1 Den binome ligning

Et polynomium er et udtryk med mange led (*poly* kommer af græsk og betyder mange). Et binomium er et udtryk med to led. En binom ligning er en ligning af formen $z^n = a$, hvor $n \in N$ og $a \in C$. Vi ønsker at løse denne ligning for den ubekendte z. Denne opgave kan også formuleres således: Vi ønsker at bestemme samtlige komplekse n'te rødder af a. Ved en kompleks n'te rod af a vil vi forstå et tal som opløftet til n'te giver a.

Bemærkning 38 *Det skal vise sig, at antallet af komplekse n'te rødder af et tal a altid er n, når undtages $a=0$, der kun har én n'te rod, nemlig 0. Man bør derfor være varsom ved brugen af rodtegn til angivelse af en rod. Vær opmærksom på, at det er en strengt overholdt konvention, at hvis $a \in R_+$,så betyder $\sqrt[n]{a}$ dét positive reelle tal, der opløftet til n'te, giver a. Eksempelvis har ligningen $z^2 = 2$ to løsninger, den ene er $\sqrt{2}$, den anden er $-\sqrt{2}$. Den første af disse er positiv (og lig ca. 1.4142), den anden negativ. Men begge kan betragtes som komplekse kvadratrødder af 2.*

I det følgende udleder vi en formel, der giver samtlige løsninger til den binome ligning $z^n = a$. Vi skriver a på polær form, $a = re^{iv}$, hvor altså $r \geq 0$ og $v \in R$. Ligeledes skrives den ubekendte på polær form $z = \rho e^{i\theta}$, med $\rho \geq 0$ og $\theta \in R$. Indsættes disse polære former i ligningen, fås

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{iv}$$

Ved brug af sædvanlige regneregler (der jo gælder!) fås

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{iv}$$

De to sider af denne ligning er polære former af samme tal, så $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p2\pi$, hvor $p \in Z$. Da $\rho \geq 0$ fås heraf, at $\rho = \sqrt[n]{r}$, hvor rodtegnet angiver den konventionelle positive rod af et positivt tal. Desuden finder vi, at $\theta = \frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}$. Bemærk, at vi kun behøver betragte $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, idet flere p-værdier blot vil give θ-værdier, der afviger fra en allerede betragtet θ-værdi med et multiplum af 2π. Hermed har vi fundet en formel for samtlige rødder i ligningen $z^n = a = r^{iv}$, nemlig

$$z = \sqrt[n]{r} \exp\left(i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)}$$

hvor $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Man bør specielt bemærke, at samtlige rødder har modulus $\sqrt[n]{r}$ og således i den komplekse plan ligger på en cirkel med denne radius og centrum i 0. Desuden bemærker man, at to på hinanden følgende rødder har argumenter, der afviger fra hinanden med $\frac{2\pi}{n}$. Rødderne er altså jævnt fordelt på den omtalte cirkel. Har man fundet én rod, så er de andre let placeret.

Eksempel 39 *Vi vil løse ligningen $z^5 = 32$. Vi bemærker, at én rod kan gættes, nemlig* 2 *Men ligningen er jo binom, så de andre 4 rødder ligger derfor på en cirkel med radius 2 (og centrum i 0). To på hinanden følgende rødder ligger desuden på cirklen i en vinkelafstand på $\frac{2\pi}{5}$. Vi kan altså indtegne røddernes placering i den komplekse plan før vi overhovedet har fundet et udtryk for mere end én af dem. For at finde et udtryk for rødderne bruger vi formlen ovenfor og finder*

$$\begin{aligned} z &= 2\exp\left(i\left(\frac{0}{5} + p\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2e^{ip\frac{2\pi}{5}} \\ &= 2\left(\cos\left(p\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(p\frac{2\pi}{5}\right)\right) \end{aligned}$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4$. For $p = 0$ fås $z = z_0 = 2$. For $p = 1$ fås $z = z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$, for $p = 2$ fås $z = z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$. For $p = 3$ og $p = 4$ fås af symmetrigrunde, at $z_3 = \overline{z_2}$ og $z_4 = \overline{z_1}$.

Eksempel 40 *Find de 3 komplekse tredierødder af -125. Anderledes sagt: Løs den binome ligning $z^3 = -125$. Én løsning er åbenbart -5, de to andre ligger på en cirkel med radius 5 og centrum i 0. Rødderne ligger i en vinkelafstand fra hinanden på $\frac{2\pi}{3}$. For hurtigt at finde et udtryk for rødderne laves en figur og der ræsonneres på en passende valgt trekant. Man finder, at de to andre rødder er $\frac{5}{2} \pm i\frac{5}{2}\sqrt{3}$.*

Bemærkning 41 *Man bør hér bemærke, at beder man Maple om* $(-125)\hat{}(1/3)$, *så får man roden $\frac{5}{2} + i\frac{5}{2}\sqrt{3}$. Vil man have -5, skal man bede om surd(-125, 3); Selvfølgelig kan man bare bede Maple om at løse ligningen v.hj.a. kommandoen solve. Da ligningen er polynomial, fås samtlige 3 rødder.*

Eksempel 42 *Komplekse kvadratrødder får man let styr på. Der er jo kun 2, og de ligger jævnt fordelt på en cirkel. Så hvis den ene rod er $x + iy$, så må den anden være $-x - iy$. Vi prøver at løse ligningen $z^2 = -4i$. Bruges formlen, skrives først $-4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Herefter har vi*

$$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+p\pi\right)}$$

hvor $p = 0, 1$. Løsningerne er altså

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ z_1 &= -z_0 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Eksempel 43 *Lad os løse ligningen $z^4 = 1+i$, og nøjes med at give løsningerne på polær form. (Der er god grund til denne nøjsomhed!). Vi har $|1 + i| = \sqrt{2}$og* $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$*, så løsningerne er givet ved*

$$z = \sqrt[8]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{16} + p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3$. Rødderne ligger på en cirkel med radius $\sqrt[8]{2}$, og de deler cirkelbuen i 4 lige store stykker. Den ene af rødderne ligger i første kvadrant i en vinkelafstand fra x-aksen på $\frac{\pi}{16}$.

1.4.2 Andengradsligningen

Betragt andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0$$

hvor $a, b, c \in C$, og $a \neq 0$. Vi vil vise, at ligningen kan løses på sædvanlig vis. Omskriv venstresiden således:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Løsningerne til andengradsligningen opfylder derfor følgende ligning

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

som vi kan anse for binom, hvis vi midlertidigt opfatter $w = z + \frac{b}{2a}$ som den ubekendte. Den binome ligning

$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

har som enhver anden binom ligning af anden grad 2 løsninger, nemlig de 2 komplekse kvadratrødder af $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, som vi kan skrive på formen $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. Altså kan løsningerne til andengradsligningen skrives

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

der også kan skrives på den traditionelle form

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Hvilke af de to komplekse kvadratrødder det er, at $\sqrt{b^2-4ac}$ refererer til, behøver vi ikke tage stilling til, da vi med $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ jo skal have begge to.

Eksempel 44 *Vi løser ligningen $z^2 - 2z + (1+i) = 0$. Vi finder*

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+i)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4i}}{2}$$

I et tidligere eksempel har vi imidlertid løst den binome ligning $w^2 = -4i$, d.v.s. fundet de to komplekse kvadratrødder $\pm\sqrt{-4i}$. Resultatet var $\pm\sqrt{-4i} = \pm\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$. Altså finder vi

$$z = \frac{2 \pm \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Eksempel 45 *Vi vil løse ligningen $z^2 + z + 1 = 0$. Vi finder*

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

idet de to løsninger til den binome ligning $w^2 = -3$ er $w = \pm i\sqrt{3}$.

1.4.3 Polynomier generelt

Et polynomium i den variable z er et udtryk af formen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

hvor *koefficienterne* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er tal (i dette afsnit komplekse). Bemærk, at eksponenterne til z alle er ikke-negative hele tal. Hvis $a_n \neq 0$, vil vi kalde a_n for *den ledende koefficient*, og sige at polynomiets *grad* er n. Et polynomium af 0'te grad er blot et tal $a_0 \neq 0$. Nulpolynomiet er blot udtrykket 0. Når det overhovedet tillægges en grad, siger man at den er $-\infty$.

Eksempel 46 *Udtrykkene* $2z^3 - z + 11, -\pi z^6 + 5z^5 + (5 + 3i)\, z^2 + z$ *og 7 er polynomier i den variable z af grader henholdsvis 3, 6 og 0. Udtrykkene* $4z^{-2} + 6z^{-1} - 8 + z + \frac{1}{2}z^2$ *og* $5z^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{2}}$ *er* ***ikke*** *polynomier i den variable z. Et udtryk med uendeligt mange led som* $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots$ *er ikke et polynomium, men kaldes en uendelig række.*

Vi skal i dette afsnit behandle rødder i polynomier. I det foregående afsnit viste vi, at den sædvanlige formel til bestemmelse af rødderne i et andengradspolynomium stadig gælder, når blot kvadratroden tolkes som bestemmelse af en kompleks kvadratrod. Der findes også formler til bestemmelse af rødderne i et tredie- og fjerdegradspolynomium. Disse formler er ret komplicerede og kan ikke generelt anbefales brugt. Det interessante er imidlertid, at formlerne overhovedet findes. Det kan nemlig vises, at rødderne i et polynomium af femte eller højere grad ikke generelt kan udtrykkes ved brug af endeligt mange af følgende symboler: De naturlige tal N, Polynomiets koefficienter, $+, -, /$ og rodtegn. Dette resultat går tilbage til 1826 og skyldes nordmanden Niels Henrik Abel (1802-29). Påstanden om manglen på formler skal ikke overfortolkes. Husk, at bestemmelsen af rødderne i polynomiet $z^n - a$ jo blot er bestemmelsen af samtlige rødder af a. Franskmanden Evariste Galois (1811-32) gav et kriterium for, om rødderne i et givet polynomium kan udtrykkes ved rodtegn.

På trods af manglen på formler for rødderne i et generelt polynomium af grad ≥ 5 har disse polynomier rødder indenfor C. Der gælder nemlig følgende sætning, der går tilbage til Carl Friedrich Gauss (1777-1855):

Sætning 47 ***Algebraens Fundamentalsætning****. Ethvert polynomium af grad* ≥ 1 *har mindst én rod indenfor de komplekse tal.*

Bevis. Beviset er indviklet, hvis det skal føres uden forudgående kendskab til kompleks funktionsteori. Vi vil ikke give noget bevis hér. ■

Definition 48 *Et tal* $z_1 \in C$ *som er rod i polynomiet p siges at have multipliciteten* $k \in N$*, hvis* $p(z) = (z - z_1)^k\, q(z)$*, og* z_1 *ikke er rod i q. Hvis multipliciteten er 1, siges roden at være simpel.*

Eksempel 49 *I polynomiet* $5z^4 - 50z^3 + 120z^2 + 160z - 640$ *er 4 rod af multiplicitet 3, og* -2 *er rod af multiplicitet 1, er altså en simpel rod. Polynomiet kan nemlig skrives som* $5\,(z + 2)\,(z - 4)^3$.

Korollar 50 *Polynomiet* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$*, hvor* $n \geq 1$ *(og* $a_n \neq 0$*) kan skrives som et produkt af* a_n *og n førstegradsfaktorer:*

$$p(z) = a_n\,(z - z_1)\,(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ *har altså n rødder, hvis disse regnes med multiplicitet.*

Bevis. Da $n \geq 1$ har polynomiet en rod $z_1 \in C$. Polynomiers division af $p(z)$ med førstegradsfaktoren $z - z_1$ vil give en rest på 0, divisionen går op.

Altså $p(z) = (z - z_1) q_1(z)$, hvor q_1 er et polynomium af grad $n-1$. Hvis $n = 1$ er $q_1(z)$ blot en konstant, der nødvendigvis må være $a_n = a_1$. Hvis $n > 1$, må $q_1(z)$ have en rod z_2. Ved polynomiers division fås da, at $q_1(z) = (z - z_2) q_2(z)$, hvor q_2 er et polynomium af grad $n-2$. Hvis $n = 2$ er $q_2(z)$ blot en konstant, der nødvendigvis må være $a_n = a_2$. Hvis $n > 2$, må $q_2(z)$ have en rod z_3. Således fortsættes og vi finder

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_1) q_1(z) = (z - z_1)(z - z_2) q_2(z) \\ &= \ldots = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \ldots (z - z_n) q_n(z) \end{aligned}$$

hvor nu $q_n(z)$ har grad nul, altså er en konstant, og denne er nødvendigvis a_n. ■

Sætning 51 *Hvis et polynomium har reelle koefficienter og $z_1 \in C$ er rod, så er også $\overline{z_1}$ rod.*

Bevis. Lad polynomiet $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ have reelle koefficienter, altså $a_k \in R$, for $k = 0, 1, \ldots, n$. Da z_1 er rod har vi

$$a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0 = p(z_1) = 0$$

Ved kompleks konjugation fås

$$\overline{a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0} = \overline{0} = 0$$

Vi udnytter egenskaberne for kompleks konjugation ($\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ og $\overline{(ab)} = \overline{a}\overline{b}$), og får først

$$\overline{a_n}\overline{z_1^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z_1^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_1} + \overline{a_0} = 0$$

og dernæst, da koefficienterne er reelle og da $\overline{z_1^k} = (\overline{z_1})^k$:

$$a_n (\overline{z_1})^n + a_{n-1} (\overline{z_1})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_1} + a_0 = 0$$

men venstre side er jo $p(\overline{z_1})$, hvorfor vi altså har $p(\overline{z_1}) = 0$. ■

Korollar 52 *Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ og med reelle koefficienter kan skrives som et produkt af reelle første- og andengradsfaktorer.*

Bevis. Et sådant polynomium kan jo skrives som et produkt af komplekse førstegradsfaktorer. Nogle af disse kan være reelle. De imaginære førstegradsfaktorer kommer i par af formen $(z - z_1)(z - \overline{z_1})$. Med $z_1 = a + ib$, $a, b \in R$, fås

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - \overline{z_1}) &= (z - (a + ib))(z - (a - ib)) \\ &= ((z - a) - ib)((z - a) + ib) \\ &= (z - a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

og dette andengradspolynomium har reelle koefficienter (udganget: $z^2 - 2za + a^2 + b^2$). ■

Sætning 53 *Lad polynomiet* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *med* $a_n \neq 0$*, have hele koefficienter, altså* $a_k \in Z$ *for* $k = 0, 1, \ldots, n$*. Antag polynomiet har en rational rod* $z_1 = \frac{p}{q}$*,* $p, q \in Z$*, hvor brøken er uforkortelig. Så gælder, at* $p\, |a_0$ *og* $q\, |a_n$*.*

Bevis. Vi har

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplikation med q^n på begge sider giver

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

der også kan skrives

$$\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right) p + a_0 q^n = 0$$

Vi ser, at p går op i første led, p må derfor også gå op i andet led $a_0 q^n$. Men p og q har ingen fælles primtalsfaktorer, så p går ikke op i q^n. Derfor må p gå op i a_0. Beviset for, at $q\, |a_n$ forløber ganske analogt. ■

Korollar 54 *Har et polynomium* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *med* $a_n \neq 0$*, hele koefficienter, skal evt. rationale rødder søges blandt*

$$\pm \frac{divisorer\ i\ a_0}{divisorer\ i\ a_n}$$

Med denne skrivemåde menes at alle kombinationer skal undersøges.

Eksempel 55 *Vi vil finde rødderne i polynomiet* $p(z) = 5z^4 - 30z^3 + 65z^2 + 30z - 520$*, og samtidigt faktorisere polynomiet. Polynomiet har hele koefficienter. Da divisorerne i 520 er temmelig mange, og da* $\frac{1}{5} p(z)$ *har de samme rødder som* $p(z)$ *og stadig hele koefficienter, finder vi rødderne i* $\frac{1}{5} p(z) = z^4 - 6z^3 + 13z^2 + 6z - 104$*. Divisorer i* 104 *er* $2, 4, 8, 13, 26, 52, 104$*. Den ledende koefficient er 1. De mulige rationale rødder er derfor* $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 13, \pm 26, \pm 52, \pm 104$*. Hvis vi begynder afprøvningen nedefra, finder vi først, at* -2 *er rod. Ved polynomiers division af* $z^4 - 6z^3 + 13z^2 + 6z - 104$ *med* $z + 2$ *fås* $z^3 - 8z^2 + 29z - 52$*. Vi skal nu bestemme rødder i dette polynomium. Mulige rationale rødder er* $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 13, \pm 26, \pm 52$*. Bemærk dog, at polynomiet ikke kan have en negativ rod p.gr.a. de alternerende fortegn. De mulige rationale rødder er derfor* $1, 2, 4, 8, 13, 26, 52$*. Afprøvning nedefra viser, at 4 er rod. Polynomiers division af* $z^3 - 8z^2 + 29z - 52$ *med* $z - 4$ *giver* $z^2 - 4z + 13$*. Dette andengradspolynomium har ingen rationale rødder, til gengæld har vi en formel for rødderne. Vi finder, at disse er*

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Rødderne i det givne polynomium er altså $-2, 4, 2 \pm 3i$. *Polynomiet kan faktoriseres i komplekse førstegradsfaktorer således*

$$p(z) = 5(z+2)(z-4)(z-(2+3i))(z-(2-3i))$$

I reelle første- og andengradsfaktorer ser faktoriseringen således ud

$$p(z) = 5(z+2)(z-4)\left(z^2 - 4z + 13\right)$$

Eksempel 56 *Vi vil finde rødderne i polynomiet* $p(z) = z^6 - 7z^5 + \frac{49}{4}z^4 + 4z^2 - 28z + 49$, *og samtidigt faktorisere polynomiet. Polynomiet har ikke hele koefficienter, men det har polynomiet* $4p(z) = 4z^6 - 28z^5 + 49z^4 + 16z^2 - 112z + 196$, *der jo har de samme rødder. Vi bemærker med det samme, at polynomiet ikke har negative rødder. Divisorerne i* 196 *er* $1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196$. *Divisorer i den ledende koefficient* (4) *er* $1, 2, 4$. *De mulige rationale rødder er herefter:*

$$1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{49}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{49}{4}$$

Ved afprøvning finder man, at $\frac{7}{2}$ *er rod. Polynomiers divison af* $4z^6 - 28z^5 + 49z^4 + 16z^2 - 112z + 196$ *med* $2\left(z - \frac{7}{2}\right) = 2z - 7$ *giver* $2z^5 - 7z^4 + 8z - 28$. *Dette polynomium har (selvfølgelig) heller ingen negative rødder. Divisorer i* 28 *er* $1, 2, 4, 7, 14, 28$ *og divisorer i den ledende koefficient er* $1, 2$. *Mulige rationale rødder er derfor*

$$1, 2, 4, 7, 14, 28, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$$

Ved kontrol ses det, at $\frac{7}{2}$ *er rod (hermed er den altså dobbeltrod i det oprindelige polynomium). Polynomiers division af* $2z^5 - 7z^4 + 8z - 28$ *med* $2z - 7$ *giver* $z^4 + 4$. *Bestemmelse af rødderne i* $z^4 + 4$ *betyder løsning af den binome ligning* $z^4 = -4 = 4e^{i\pi}$. *Den sædvanlige formel giver de fire løsninger* $1 \pm i$ *og* $-1 \pm i$. *Rødderne i det oprindelige polynomium er altså* $\frac{7}{2}$ *(med multiplicitet 2),* $1 \pm i$ *og* $-1 \pm i$. *Polynomiet kan faktoriseres i komplekse førstegradsfaktorer således*

$$p(z) = (2z-7)^2 (z-(1+i))(z-(1-i))(z-(-1+i))(z-(-1-i))$$

og i reelle første- og andengradsfaktorer således

$$(2z-7)^2 \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$$

1.5 Eulers formler. De komplekse trigonometriske funktioner.

Ifølge definitionen af den komplekse eksponentialfunktion har vi for $v \in R$

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos v + i \sin v \\ e^{-iv} &= \cos v - i \sin v \end{aligned}$$

Ved addition af disse formler og efter division med 2 fås

$$\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$$

Tilsvarende fås ved subtraktion og division med $2i$

$$\sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$$

Disse to formler kaldes Eulers formler efter schweitzeren Leonhard Euler (1707-83). Deres nytte ligger i, at eksponentialfunktionen er let at regne med.

Eksempel 57 *Vi ønsker* $\sin^4 x$ *udtrykt ved* $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$. *Vi bruger den ene af Eulers formler:*

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

En sådan formel er eksempelvis nyttig ved integration. Skal integralet $\int_0^\pi \sin^4 x dx$ *beregnes, finder vi*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^4 x dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

Højresiderne i Eulers formler $\cos v = \frac{1}{2}\left(e^{iv} + e^{-iv}\right)$ og $\sin v = \frac{1}{2i}\left(e^{iv} - e^{-iv}\right)$ giver mening for alle $v \in C$. Vi kan derfor bruge Eulers formler til en udvidelse af definitionsområdet for de trigonometriske funktioner. Vi definerer altså blot, at $\cos v$ og $\sin v$ for $v \in C \backslash R$ skal være givet ved Eulers formler. For $v \in R$ er der ikke tale om en definition.

Eksempel 58 *Vi vil beregne* $\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right)$. *Vi finder*

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right) &= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right)\right) - \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{6} + i\ln 2\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{6} - \ln 2\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{6} + \ln 2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-\ln 2} - e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{\ln 2}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Bemærkning 59 *De hyperbolske funktioner* sinh *og* cosh *defineres for* $z \in C$ *ved*

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\\ \cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\end{aligned}$$

Bemærk, at for $z \in R$ *har disse funktioner reelle værdier. Der er åbenbart følgende sammenhæng mellem de hyperbolske funktioner og de trigonometriske. For alle* $z \in C$*:*

$$\begin{aligned}\cosh(iz) &= \cos z\\ \sinh(iz) &= i\sin z\end{aligned}$$

1.6 Funktioner med komplekse værdier

Her kan enten være tale om funktioner defineret på en delmængde (interval) af R, men med værdier i C, eller om funktioner defineret i en delmængde D af C og med værdier i C. Vi omtaler begge i de følgende to afsnit.

1.6.1 Kompleks funktion af reel variabel

Lad f være en funktion defineret på intervallet $I \sqsubseteq R$ og med værdier i C. Dette skrives kort således: $f\colon I \longrightarrow C$. For ethvert $t \in I$ er billedet $f(t)$ altså et komplekst tal (ikke nødvendigvis imaginært, altså ikke-reelt). Da $f(t)$ er et komplekst tal kan det skrives (entydigt) på formen $f(t) = u(t) + iv(t)$, hvor $u(t), v(t) \in R$. Herved defineres to reelle funktioner u og v, som vi vil kalde realdelen og imaginærdelen af f, henholdsvis. Altså $u = \operatorname{Re} f$ og $v = \operatorname{Im} f$. Hvis vi træder et skridt baglæns og erindrer, at $i = (0,1)$, så kan vi skrive $f(t) = (u(t), v(t))$. Vi kan altså også tænke på f som en vektorfunktion. Er t tiden, så kan $f(t)$ være positionen til tiden t.

Eksempel 60 *Lad* $f(t) = e^{3t+i7t}$ *for alle* $t \in R$*. Anderledes skrevet:* $f(t) = e^{3t}(\cos 7t + i\sin 7t)$*. Med betegnelserne fra før har vi altså* $u(t) = e^{3t}\cos 7t$ *og* $v(t) = e^{3t}\sin 7t$.

Vi definerer nu begrebet grænseværdi for funktion. Hvis man er fortrolig med definitionen i det tilfælde, hvor $f\colon I \longrightarrow R$, så er der i og for sig ikke meget nyt.

Definition 61 *Lad* $f\colon I \longrightarrow C$*. Lad* a *være et punkt i* I *eller et af* I*'s endepunkter. Så siges* $f(t)$ *at have en grænseværdi for* $t \to a$*, hvis der findes et tal* $A \in C$*, så der til ethvert (nok så lille) positivt tal* ε *eksisterer et postivt tal* δ*, så hvis blot* t *er indenfor en afstand af* δ *fra* a*, så er* $f(t)$ *indenfor en afstand af* ε *fra* A*. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \text{så} \quad 0 < |t-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Symbolet $\forall$ skal læses: "for ethvert" (eller "for alle"). Symbolet $\exists$ skal læses "der eksisterer". Har $f(t)$ grænseværdien A for $t \to a$, så skriver man

$$\lim_{t\to a} f(t) = A$$

Bemærkning 62 *Forskellen fra den tidligere kendte definition er (når bortses fra tidligere definitioners evt. mangel på præcision), at numerisk-tegnet i udtrykket $|f(t) - A|$ nu betyder modulus af det komplekse tal $f(t) - A$.*

Definition 63 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Lad $a \in I$. Funktionen f siges at være kontinuert i a, hvis*

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$

Sætning 64 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Skriv $f = u + iv$, hvor $u, v\colon I \longrightarrow R$. Lad a være et punkt i I eller et af I's endepunkter. Så har $f(t)$ grænseværdien $A = A_1 + iA_2$, $A_1, A_2 \in R$, for $t \to a$, hvis og kun hvis $u(t)$ og $v(t)$ har grænseværdierne A_1 og A_2, henholdsvis, for $t \to a$. Hvis $a \in I$, er f kontinuert i a, hvis og kun hvis u og v begge er kontinuerte i a.*

Bevis. Selv om denne sætning ikke er svær at vise, springer vi beviset over. ■

Definition 65 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Lad $a \in I$. Funktionen f siges at være differentiabel i a, hvis der findes et tal $A \in C$, så*

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \to A$$

for $t \to a$. Tallet A vil blive kaldt differentialkvotienten, og vi skriver $f'(a) = A$.

Sætning 66 *Lad $f, g\colon I \longrightarrow C$ begge være differentiable i $a \in I$. Lad $k \in C$ være en konstant. Så gælder som for reelle funktioner, at kf, $f + g$, fg samt (forudsat at $g(a) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ alle er differentiable, og $(kf)'(a) = kf'(a)$ $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ og $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*

Bevis. Beviserne som de kendes fra reelle funktioner, kan overtages i deres helhed. ■

Bemærkning 67 *Bemærk, at sammensætning af to funktioner af den givne type ikke nævnes. Dette skyldes jo, at $f(g(t))$ ikke giver mening med mindre $g(t) \in I$. Den kendte regel for differentiation af sammensat funktion gælder imidlertid i følgende form:*

Sætning 68 *Lad $g\colon I \longrightarrow J \subseteq R$ og $f\colon J \longrightarrow C$. Er g differentiabel i $a \in I$ og er f differentiabel i $g(a)$, så er $f \circ g$ differentiabel i a og $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.*

Bevis. Beviset er igen som for to reelle funktioner. ■

Sætning 69 *Lad $f\colon I \longrightarrow C$. Skriv $f = u + iv$, hvor $u, v\colon I \longrightarrow R$. Lad $a \in I$. Så er f differentiabel i a med $f'(a) = A = A_1 + iA_2$, $A_1, A_2 \in R$, hvis og kun hvis u og v begge er differentiable i a med differentialkvotienterne A_1 og A_2, henholdsvis. Altså $u'(a) = A_1$ og $v'(a) = A_2$.*

Bevis. Igen ikke nogen kompliceret sag at vise, men vi springer over beviset. ■

Eksempel 70 *Lad $f(t) = e^{(3+i7)t}$ for alle $t \in R$. Da realdel og imaginærdel af f er givet ved $u(t) = e^{3t} \cos 7t$ og $v(t) = e^{3t} \sin 7t$, henholdsvis, og da disse er differentiable for alle værdier af $t \in R$, gælder det samme for f. Vi finder*

$$\begin{aligned} u'(t) &= 3e^{3t} \cos 7t - 7e^{3t} \sin 7t \\ v'(t) &= 3e^{3t} \sin 7t + 7e^{3t} \cos 7t \end{aligned}$$

således at

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t) + iv'(t) = 3e^{3t} \cos 7t - 7e^{3t} \sin 7t + i \left(3e^{3t} \sin 7t + 7e^{3t} \cos 7t\right) \\ &= (3 + 7i) \left(e^{3t} \cos 7t\right) + (-7 + 3i) e^{3t} \sin 7t \\ &= (3 + 7i) \left(e^{3t} \cos 7t + ie^{3t} \sin 7t\right) = (3 + 7i) e^{(3+7i)t} \end{aligned}$$

I et konkret tilfælde har vi her set, at $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, når $\lambda \in C$.

Bemærkning 71 *Det var fristende, at sige at funktionen $f(t) = e^{\lambda t}$ jo blot er sammensat af funktionerne $t \mapsto \lambda t$ og eksponentialfunktionen $z \mapsto e^z$. Differentiation af disse to er en simpel sag. Problemet er dog, at vi ikke har defineret differentiabilitet af funktion af kompleks variabel og vist, at* exp *er differentiabel som en sådan (med den forventede afledede).*

1.6.2 Kompleks funktion af kompleks variabel

Lad nu f være en funktion defineret i en delmængde D af den komplekse plan C og med værdier i C. Dette skrives kort således: $f\colon D \longrightarrow C$. For ethvert $z \in D$ er billedet $f(z)$ altså et komplekst tal.

Eksempel 72 *Den komplekse eksponentialfunktion* exp, *altså $f(z) = e^z$ for alle $z \in C$ er af denne type. Det samme er de komplekse trigonometriske funktioner. Polynomier kan betragtes som komplekse funktioner af en kompleks variabel.*

Som i afsnittet ovenfor defineres begrebet grænseværdi for funktion analogt med tidligere. Der er dog ét problem: Hvor funktionens definitionsmængde ovenfor antoges at være et interval, og $\lim_{x \to a} f(x)$ blev defineret for punkter a i intervallet eller i et af dets endepunkter, så er funktionens definitionsområde nu en delmængde D af den komplekse plan. Det vil være for restriktivt at indskrænke de tilladte mængder D til rektangler eller cirkelskiver (f.eks.). Vi får derfor brug for begrebet *akkumulationspunkt*.

Definition 73 *Punktet $a \in C$ kaldes et akkumulationspunkt for mængden D, hvis enhver cirkelskive med centrum i a indeholder uendeligt mange punkter fra D.*

Definition 74 *Lad $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$. Lad a være et akkumulationspunkt for D. Så siges $f(z)$ at have en grænseværdi for $z \to a$, hvis der findes et tal $A \in C$, så der til ethvert (nok så lille) positivt tal ε eksisterer et postivt tal δ, så hvis blot $z \in D$ er indenfor en afstand af δ fra a, så er $f(z)$ indenfor en afstand af ε fra A. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \textit{så} \quad 0 < |z-a| < \delta \wedge z \in D \Longrightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

Har f grænseværdien A for $z \to a$, så skriver man

$$\lim_{z \to a} f(z) = A$$

Definition 75 *Lad $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$. Lad $a \in D$. Funktionen f siges at være kontinuert i a, hvis*

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

Definition 76 *Lad $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$. Lad $a \in D$. Funktionen f siges at være differentiabel i a, hvis der findes et tal $A \in C$, så*

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \to A$$

for $z \to a$. Tallet A vil blive kaldt differentialkvotienten, og vi skriver $f'(a) = A$.

Definition 77 *En funktion $f\colon D \subseteq C \longrightarrow C$, der er differentiabel i ethvert punkt af den åbne mængde D kaldes analytisk i D. (En alternativ glose er holomorf).*

Eksempel 78 *Vi nævner uden bevis, at* $\exp, \sin, \cos$ *og ethvert polynomium er analytiske funktioner i hele C.*

Bemærkning 79 *Analytiske funktioner har overraskende stærke egenskaber. Kravet om differentiabilitet i ethvert punkt af en åben delmængde af C er meget stærkt. Der er en omfattende teori om analytiske funktioner. Denne teori kræver en hel bog og et helt kursus ("Kompleks Funktionsteori"). Der gælder bl.a. det overraskende resultat, at hvis en funktion er analytisk i hele C og er begrænset, d.v.s. at der findes et tal M, så $|f(z)| \leq M$ for alle $z \in C$, så er funktionen faktisk konstant! Det er denne sætning, der kan bruges til at give et simpelt bevis for algebraens fundamentalsætning.*

Kapitel 2

Funktioner

2.1 Funktioner generelt

Definition 80 *En funktion er en afbildning, der til ethvert element (punkt) x i en given mængde A ("definitionsmængden") knytter netop et element (punkt) ("billedet") i en anden given mængde B. Billedet af x ved f betegnes med $f(x)$. Mængden af billeder kaldes billedmængden og betegnes med $f(A)$. Vi skriver $f\colon A \to B$ for at fortælle, at f er defineret i A og at billederne ved f ligger i B . Grafen af f er mængden $\{(x,y) \in A \times B \,|x \in A \wedge y = f(x)\}$. (Med $A \times B$ betegnes det cartesiske produkt mellem mængderne A og B. Det er mængden af par (x,y), hvor $x \in A$ og $y \in B$).*

Definition 81 *Funktionen $f\colon A \to B$ siges at være injektiv (eller en-entydig, 1-1), hvis det for alle $x_1, x_2 \in A$ gælder, at*

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Funktionen f kaldes surjektiv, hvis ethvert element i B er billede af et eller andet element i A, altså hvis $f(A) = B$. Funktionen f kaldes bijektiv, hvis den både er injektiv og surjektiv.

Definition 82 *Er en funktion $f\colon A \to B$ bijektiv defineres dens omvendte funktion $f^{-1}\colon B \to A$ ved ækvivalensen*

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

Definition 83 *Lad $f\colon A \to B$ og $g\colon B \to C$. Så er den sammensatte funktion $f \circ g\colon A \to C$ defineret ved $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ for alle $x \in A$.*

Definition 84 *Den funktion $id_A\colon A \to A$, der er defineret ved $id_A(x) = x$ for alle $x \in A$, kaldes den identiske afbildning i A.*

Sætning 85 *Lad $f\colon A \to B$ være bijektiv. Så gælder, at $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ for alle $x \in B$ og $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ for alle $x \in A$. Med andre ord $f \circ f^{-1} = id_B$ og $f^{-1} \circ f = id_A$.*

2.2 Reel funktion af reel variabel

Definition 86 *En funktion, hvis billedmængde er en delmængde af de reelle tal R, kaldes en reel funktion. En reel funktion af en reel variabel, er en reel funktion, hvis definitionsmængde er en delmængde af R.*

Definition 87 *Lad* $A \subseteq R$*. Funktionen* $f\colon A \to R$ *kaldes (strengt) voksende, hvis det for alle* $x_1, x_2 \in A$ *gælder, at*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funktionen kaldes (strengt) aftagende, hvis det for alle $x_1, x_2 \in A$ *gælder, at*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funktionen kaldes svagt voksende (eller ikke-aftagende), hvis det for alle $x_1, x_2 \in A$ *gælder, at*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Begrebet svagt aftagende defineres analogt. Hvis en funktion er enten voksende eller aftagende, kaldes den monoton (strengt eller svagt).

Bemærkning 88 *Enhver monoton funktion er injektiv. Den omvendte påstand gælder ikke, som vi ser i følgende eksempel.*

Eksempel 89 *Lad* f *være defineret på intervallet* $[0, 1]$ *ved forskriften*

$$f(x) = \begin{cases} x & for \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x & for \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Så er f *ikke monoton, men den er injektiv.*

2.2.1 Grænseværdi

Grænseværdibegrebet er meget centralt i det område af matematikken, der kaldes matematisk analyse (groft sagt lig med differential- og integralregning). Læseren forudsættes at have en god intuitiv forståelse af begrebet fra sin tidligere matematikundervisning. Denne forståelse kommer man langt med. I mere avancerede sammenhænge slipper man dog ikke for at præcisere begrebet.

Med $\lim_{x \to a} f(x) = A$, mener man løst sagt, at $f(x)$ begynder at ligne tallet A, når blot x er tæt på a, men dog forskellig fra a. Denne sidste tilføjelse er vigtig: Ved grænseovergangen $x \to a$ betragtes aldrig værdier af f i punktet a, og det uanset om f er defineret i a eller ej. At tale om grænseværdien $\lim_{x \to a} f(x)$ kan kun blive aktuelt, hvis ethvert interval med midtpunkt i a indeholder et punkt $x \neq a$ fra definitionsmængden for f . Lad os kalde et sådant punkt a et akkumulationspunkt for definitionsmængden.

Definition 90 *Lad D være en delmængde af R. Tallet $a \in R$ kaldes et akkumulationspunkt for D, hvis ethvert interval med midtpunkt i a indeholder uendeligt mange punkter fra D.*

Bemærkning 91 *Vi kunne ligeså godt have brugt følgende formulering: Tallet $a \in R$ kaldes et akkumulationspunkt for D, hvis ethvert interval med midtpunkt i a indeholder mindst ét punkt fra $D \backslash \{a\}$.*

Eksempel 92 *Lad funktionen f være defineret ved forskriften $f(x) = \sqrt{x^2(x^2-1)}$ for alle de reelle værdier af x, for hvilke dette udtryk selv er reelt. Dermed er definitionsområdet lig med $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$. Tallet 0 ligger i definitionsområdet, men det er ikke et akkumulationspunkt for dette. Man siger, at punktet er et isoleret punkt i definitionsområdet.*

Her følger en præcis definition af grænseværdibegrebet.

Definition 93 *Lad a være et akkumulationspunkt for definitionsmængden (D) for den reelle funktion f. Så siges $f(x)$ at have en grænseværdi for $x \to a$, hvis der findes et tal $A \in R$, så der til ethvert (nok så lille) positivt tal ε eksisterer et postivt tal δ, så hvis blot $x \in D$ er indenfor en afstand af δ fra a, så er $f(x)$ indenfor en afstand af ε fra A. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad så \;\; 0 < |x-a| < \delta \wedge x \in D \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Symbolet $\forall$ skal læses: "for ethvert" (eller "for alle"). Symbolet $\exists$ skal læses "der eksisterer". Har $f(x)$ grænseværdien A for $x \to a$, så skriver man

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Hvis f er defineret på begge sider af a, men kun værdier af x større end a ønskes betragtet, taler man om grænseværdi fra højre og skriver $\lim_{x \downarrow a} f(x) = A$. Analogt tales om grænseværdi fra venstre.

Definition 94 *Lad a være et akkumulationspunkt for definitionsmængden (D) for den reelle funktion f. Så siger vi, at $f(x) \to \infty$ for $x \to a$, hvis der til ethvert (nok så stort) positivt tal M eksisterer et postivt tal δ, så hvis blot $x \in D$ er indenfor en afstand af δ fra a, så er $f(x) > M$. Med symboler kan dette skrives*

$$\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \quad så \;\; 0 < |x-a| < \delta \wedge x \in D \Longrightarrow f(x) > M$$

Bemærkning 95 *Hvis $f(x) \to \infty$ for $x \to a$ kan man godt benytte skrivemåden*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

*men vi vil **ikke** sige at grænseværdien eksisterer. Med grænseværdi menes (normalt) et tal.*

Definition 96 *Hvis f er defineret ihvertfald på et interval af typen $[b, \infty[$, så siger vi, at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$, hvis der findes et tal A, så*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists M > b \quad \text{så} \quad x > M \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Vi skriver i bekræftende fald

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Bemærkning 97 *Der mangler forskellige definitioner. Læseren skulle dog selv kunne lave disse udfra de givne mønstre. Eksempelvis mangler en definition af $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ og af udsagnet $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$.*

Sætning 98 *Hvis $f(x)$ og $g(x)$ har grænseværdier for $x \to a$, så har $f(x) + g(x)$ og $f(x)g(x)$ også grænseværdier for $x \to a$, vi har*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \\ \lim_{x \to a} (f(x) g(x)) &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \end{aligned}$$

Hvis $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ og hvis $g(x) \neq 0$ i en omegn om a, så har $\frac{f(x)}{g(x)}$ også en grænseværdi for $x \to a$ og der gælder

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Bevis. Resultatet forudsættes bekendt og vil ikke blive vist her. ■

Bemærkning 99 *Sætningen gælder også, hvis $a = \infty$ eller $a = -\infty$. Man kan overveje i hvilket omfang sætningen gælder, hvis forudsætningerne i stedet er, at $f(x) \to \infty$ og $g(x) \to A$ for $x \to a$, hvor A er enten et tal eller $\pm\infty$. Vi vender tilbage til de problematiske versioner af disse senere.*

2.2.2 Kontinuitet

Først kommer den helt generelle definition af kontinuitet.

Definition 100 *En funktion $f \colon D \subseteq R \to R$ kaldes kontinuert i punktet $a \in D$, hvis*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \text{så} \quad |x - a| < \delta \wedge x \in D \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Når punktet a er et akkumulationspunkt for D, hvilket f.eks. er tilfældet, når D er et interval, så får vi følgende velkendte resultat, der dog ofte bruges som definition.

Sætning 101 *Lad $a \in D$ være et akkumulationspunkt for D. En funktion $f \colon D \subseteq R \to R$, er da kontinuert i a, hvis og kun hvis*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Bemærkning 102 *Med den givne definition er en funktion, hvis definitionsområde omfatter isolerede punkter, automatisk kontinuert i disse. Eksempelvis er følgende funktion kontinuert i hele sit definitionsområde:*

$$f(x) = \begin{cases} 7 & for \quad x = -3 \\ x & for \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Funktionens definitionsområde er $[0,1] \cup \{-3\}$. *Kontinuiteten i* -3 *følger ved til et givet* $\varepsilon > 0$ *at vælge* $\delta = 2$ *(for eksempel). Så er nemlig* $|x - a| < \delta \wedge x \in D$ *kun opfyldt for* $x = -3$, *og i så fald har vi jo, at* $|f(x) - f(a)| = |f(-3) - f(-3)| = 0 < \varepsilon$. *Bemærk, at fordi punktet* -3 *ikke er et akkumulationspunkt for definitionsområdet, er grænseværdien* $\lim_{x \to -3} f(x)$ *ikke defineret.*

Sætning 103 *Hvis* $f, g \colon D \subseteq R \to R$ *begge er kontinuerte i* $a \in D$, *så er også* $f + g$ *og* fg *kontinuerte i* a. *Hvis desuden* $g(a) \neq 0$, *så er* $\frac{f}{g}$ *kontinuert i* a.

Sætning 104 *Lad* $D_1 \subseteq R$ *og* $D_2 \subseteq R$, *og* $g \colon D_1 \to D_2$, *og* $f \colon D_2 \to R$. *Hvis* g *er kontinuert i* $a \in D_1$ *og* f *er kontinuert i* $g(a)$, *så er* $f \circ g$ *kontinuert i* a.

Definition 105 *En funktion, som er kontinuert i alle punkter af dens definitionsinterval, kaldes en kontinuert funktion.*

Eksempel 106 *Lad funktionen* f *være givet ved forskriften* $f(x) = \frac{1}{x}$ *for alle* $x \in R \setminus \{0\}$. *Så er* f *en kontinuert funktion, idet den er kontinuert i alle sine definitionspunkter. Derimod er funktionen* g *givet ved forskriften*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & for \quad x \neq 0 \\ 7 & for \quad x = 0 \end{cases}$$

ikke en kontinuert funktion, idet den (klart) er diskontinuert i 0. Bemærk, at uanset hvad $g(0)$ *defineres til, så er* g *diskontinuert i 0.*

Sætning 107 *Lad* $I \subseteq R$ *være et interval og lad* $f \colon I \to R$ *være kontinuert. Så gælder:*

1. *Billedmængden* $f(I)$ *er et interval, og* f *antager altså enhver værdi mellem hver to givne funktionsværdier.*

2. *Hvis* I *er et lukket og begrænset interval, så er* $f(I)$ *også et lukket og begrænset interval, og* f *antager altså såvel en største- som en mindsteværdi på* I.

3. f *er injektiv, hvis og kun hvis* f *er monoton.*

4. *Hvis* f *er injektiv, så er* f^{-1} *kontinuert.*

Bevis. Vi udelader beviset. ■

Bemærkning 108 *I påstand* $1, 3$ *og* 4 *i ovenstående sætning er det afgørende, at* I *er et interval. Påstand 2 kan generaliseres således, at ordet interval overalt erstattes af ordet mængde. Man må så selvfølgelig definere præcist, hvad en lukket og begrænset mængde er.*

Eksempel 109 *Lad funktionen* f *være defineret på mængden* $D = [0, 1[\cup [2, 3]$ *ved*

$$f(x) = \begin{matrix} x & for & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & for & 2 \leq x \leq 3 \end{matrix}$$

Så er f *kontinuert i ethvert punkt af sin definitionsmængde* D*. Dermed er* f *altså en kontinuert funktion. Det ses også, at* f *er voksende og dermed injektiv. Den inverse funktion* f^{-1} *er defineret på værdimængden for* f*, nemlig intervallet* $[0, 2]$*. Den inverse funktion er givet ved*

$$f^{-1}(y) = \begin{matrix} y & for & 0 \leq y < 1 \\ y + 1 & for & 1 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$

f^{-1} *er åbenbart ikke kontinuert i* 1*.*

Kapitel 3

Differentiabilitet

3.1 Definitionen af Differentiabilitet og Differentialkvotient

Vi minder om definitionen på begrebet differentiabilitet.

Definition 110 *En funktion f defineret i et interval omkring punktet (tallet) a kaldes differentiabel i a, hvis grænseværdien*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

eksisterer. Grænseværdien kaldes differentialkvotienten af f i a og betegnes med $f'(a)$ eller med $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$. En funktion f defineret i $[a, b]$ kaldes differentiabel fra højre i a, hvis den ensidige grænseværdi

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

eksisterer. Analogt defineres differentiabilitet fra venstre. Er funktionen f differentiabel i ethvert punkt af sit definitionsområde, så kaldes den blot differentiabel. Funktionen f' givet ved $x \longmapsto f'(x)$ kaldes den afledede af f.

Bemærkning 111 *Når man siger, at en grænseværdi eksisterer, så mener man, at den eksisterer som et tal, altså ikke som et af symbolerne $\pm\infty$. Hvis altså $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \infty$ for $x \to a$, så er f ikke differentiabel i a.*

3.2 Egenskaber for differentiable funktioner

Som man nok erindrer fra tidligere undervisning, er det noget besværligt at bruge definitionen direkte. Men ved brug af definitionen udledes de velkendte resultater vedrørende differentiation af sum, produkt, kvotient og sammensat funktion:

Sætning 112 *Antag, at f og g er differentiable i a. Så er $f+g$ og fg begge differentiable i a, og*

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a)+g'(a)\\ (fg)'(a) &= f'(a)\,g(a)+f(a)\,g'(a)\end{aligned}$$

Hvis desuden $g(a)\neq 0$, så er $\frac{f}{g}$ differentiabel i a, og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{g(a)\,f'(a)-f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

Sætning 113 *Hvis g er differentiabel i a og f er differentiabel i $g(a)$, så er den sammensatte funktion $f\circ g$ differentiabel i a, og*

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\,g'(a)$$

Her følger nogle simple øvelser, hvor man blot skal bruge disse "regneregler".

Øvelse 114 *Find $f'(x)$, når*

1. $f(x)=3\sin x+7\cos x$
2. $f(x)=5x^6e^x$
3. $f(x)=\frac{x^2+4}{1+2x}$
4. $f(x)=\sqrt{3-\sin(2x)}$

Sætning 115 *Hvis f er differentiabel i a, så er f kontinuert i a.*

Bevis. Vi har, at

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(a)$$

for $x\to a$. Dette medfører specielt, at

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\leq|f'(a)|+1$$

for alle x i et passende lille interval omkring a. Anderledes skrevet, og med $M=|f'(a)|+1$ fås

$$|f(x)-f(a)|\leq M\,|x-a|$$

Men heraf fås klart, at $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Altså er f kontinuert i a. ■

Før næste sætning, Rolles sætning, viser vi en hjælpesætning - et såkaldt lemma.

Lemma 116 *Hvis f er differentiabel i a med $f'(a) > 0$, så findes der et interval I med midtpunkt i a, så for alle $x \in I$ med $x \neq a$, vi har*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Bevis. Eftersom vi har, at

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

og $f'(a) > 0$, må der eksistere et interval I med midtpunkt i a, så

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \frac{1}{2} f'(a)$$

for alle $x \in I$ med $x \neq a$. Men heraf følger specielt, at

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) > -\frac{1}{2} f'(a)$$

hvoraf påstanden følger. ■

Sætning 117 ***Rolles Sætning***. *Lad f være kontinuert på det lukkede interval $[a, b]$, og differentiabel i det åbne interval $]a, b[$. Antag yderligere, at $f(a) = f(b) = 0$. Så eksisterer der et tal $\xi \in]a, b[$, så $f'(\xi) = 0$.*

Bevis. Hvis f er konstant lig med nul, så er $f'(x) = 0$ for alle $x \in]a, b[$. Hvis ikke f er konstant lig med nul, så har f enten en positiv størsteværdi på intervallet $[a, b]$, eller den har en negativ mindsteværdi (evt. begge). Dette følger af, at f er kontinuert på det lukkede interval. Antag, at f har en positiv størsteværdi. Lad ξ være det punkt, i hvilken størsteværdien antages. Vi har åbenbart, at $\xi \in]a, b[$. Vi vil vise, at $f'(\xi) = 0$. Antag, at $f'(\xi) > 0$. Så har vi ifølge lemmaet ovenfor, at

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0$$

for alle x i et interval med midtpunkt i ξ. Men i det interval har vi så, at $f(x) > f(\xi)$ for $x > \xi$, hvilket er en modstrid med at $f(\xi)$ er størsteværdien for f. Hvis i stedet $f'(\xi) < 0$, ville vi på samme måde finde, at $f(x) > f(\xi)$ for punkter nær ξ, der opfylder $x < \xi$. Igen en modstrid. Altså må $f'(\xi) = 0$. Har f ingen positiv størsteværdi, men en negativ mindsteværdi, så har $-f$ en positiv størsteværdi, og resultatet følger heraf. ■

Sætning 118 ***Middelværdisætningen***. *Lad f være kontinuert på det lukkede interval $[a, b]$, og differentiabel i det åbne interval $]a, b[$. Så eksisterer der et tal $\xi \in]a, b[$, så*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Bevis. Betragt funktionen h defineret ved

$$h(x) = (b-a)(f(x) - f(a)) - (x-a)(f(b) - f(a))$$

Så er h åbenbart kontinuert på det lukkede interval $[a,b]$, og differentiabel i det åbne interval $]a,b[$. Endvidere har vi, at $h(a) = h(b) = 0$. Ifølge Rolles sætning findes der derfor et tal $\xi \in]a,b[$, så $h'(\xi) = 0$. Men $h'(x) = (b-a) f'(x) - (f(b) - f(a))$, så

$$0 = h'(\xi) = (b-a) f'(\xi) - (f(b) - f(a))$$

hvoraf påstanden følger. ■

Sætning 119 ***Den udvidede middelværdisætning.*** *Lad f og g begge være kontinuerte på det lukkede interval $[a,b]$, og differentiable i det åbne interval $]a,b[$. Så eksisterer der et tal $\xi \in]a,b[$, så*

$$(f(b) - f(a)) g'(\xi) = (g(b) - g(a)) f'(\xi)$$

Bevis. Beviset ligner beviset for middelværdisætningen: Betragt funktionen h defineret ved

$$h(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$

Så er h åbenbart kontinuert på det lukkede interval $[a,b]$, og differentiabel i det åbne interval $]a,b[$. Endvidere har vi, at $h(a) = h(b) = 0$. Ifølge Rolles sætning findes der derfor et tal $\xi \in]a,b[$, så $h'(\xi) = 0$. Men $h'(x) = (g(b) - g(a)) f'(x) - g'(x)(f(b) - f(a))$, så

$$0 = h'(\xi) = (g(b) - g(a)) f'(\xi) - g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

hvoraf påstanden følger. ■

Sætning 120 *Lad I være et åbent interval og lad $f\colon I \to R$ være differentiabel i I med $f'(x) = 0$ for alle $x \in I$. Så er f konstant.*

Bevis. Lad x_1 og x_2 være to punkter fra I. Vi kan antage, at $x_1 < x_2$. Vi vil vise, at f har samme værdi i disse punkter. Af middelværdisætningen fås, at der eksisterer et tal $\xi \in]x_1, x_2[$, så

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

men ifølge antagelsen er $f'(\xi) = 0$, så $f(x_2) - f(x_1) = 0$. ■

Sætning 121 *Lad I være et åbent interval og lad $f\colon I \to R$ være differentiabel i I. Så gælder, at f er voksende i I, hvis og kun hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$, og ikke lig med 0 i noget delinterval af I.*

Bevis. Antag først, at f er voksende i I. Lad $x \in I$. Så har vi for all $t \in I$ med $t \neq x$, at

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} > 0$$

Men heraf følger umiddelbart, at

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0$$

Hvis $f'(x) = 0$ for alle x i et delinterval af I, så ville f være konstant i det interval og dermed ikke voksende. Altså er f' ikke lig med nul i noget delinterval. Antag nu omvendt, at $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$, og ikke lig med 0 i noget delinterval af I. Lad $x_1 < x_2$. Vi skal vise, at $f(x_1) < f(x_2)$. Af middelværdisætningen fås, at der eksisterer et tal $\xi \in]x_1, x_2[$, så

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

Altså har vi, at $f(x_2) \geq f(x_1)$. Hvis $f(x_2) = f(x_1)$ ville f være konstant i intervallet $[x_1, x_2]$. Men så ville f' være nul i intervallet $[x_1, x_2]$ i modstrid med antagelsen. ■

3.3 l'Hospitals regel

Som vi tidligere har set gælder der, at hvis $\lim_{x \to a} f(x)$ og $\lim_{x \to a} g(x)$ begge eksisterer, og hvis den sidste er forskellig fra nul, så eksisterer også $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ og den er lig forholdet mellem de to grænseværdier. Hvad stiller vi så op med det tilfælde, hvor $\lim_{x \to a} g(x) = 0$? Opførslen af $\frac{f(x)}{g(x)}$ for $x \to a$ er normalt ikke et problem, når $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, idet nævnerens forsvinden, så blot betyder, at $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \to \infty$ for $x \to a$. Nærmere deltaljer om fortegn vil afhænge af med hvilket fortegn $g(x)$ nærmer sig nul. Dette vil ofte afhænge af om $x \downarrow a$ eller $x \uparrow a$. Vi giver et par eksempler.

Eksempel 122 *Vi har, at* $\frac{e^x}{x^2} \to \infty$ *for* $x \to 0$ *og* $\frac{e^x}{x} \to \infty$ *for* $x \downarrow 0$, *men* $\frac{e^x}{x} \to -\infty$ *for* $x \uparrow 0$.

Vi betragter nu det tilbageværende problem, hvor både tæller og nævner går mod nul. Vi giver først en række simple eksempler, der skal vise, at man intet umiddelbart kan slutte alene ud fra den kendsgerning, at tæller og nævner går mod nul.

Eksempel 123 *Betragt* $\frac{17x}{x}$ *for* $x \to 0$. *Både tæller og nævner går mod nul. Grænseværdien er åbenbart 17.*

Eksempel 124 *Betragt* $\frac{17x}{x^3}$ *for* $x \to 0$. *Både tæller og nævner går mod nul. Vi har* $\frac{17x}{x^3} = \frac{17}{x^2} \to \infty$ *for* $x \to 0$.

Eksempel 125 *Betragt* $\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ *for* $x \to 0$. *Både tæller og nævner går mod nul. Vi har* $\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, *der ingen grænseværdi har for* $x \to 0$.

Sætning 126 ***l'Hospitals regel.*** *Lad* f *og* g *være differentiable i* $]a,b[$, *hvor* $-\infty \le a < b \le \infty$, *med* $g'(x) \neq 0$, *for alle* $x \in]a,b[$. *Antag, at*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \text{ for } x \downarrow a$$

Så gælder, at hvis enten

$$f(x) \to 0 \text{ og } g(x) \to 0 \text{ for } x \downarrow a$$

eller

$$g(x) \to \infty \text{ for } x \downarrow a$$

da har vi, at

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \text{ for } x \downarrow a$$

Sætningen gælder også når $x \downarrow a$ *erstattes af* $x \uparrow b$. *Sætningen gælder uanset om* A, a *og* b *er et tal eller står for et af symbolerne* $\pm\infty$.

Bevis. *Bevis nummer 1.* Vi betragter kun det tilfælde, hvor både a og A er tal, og hvor $g'(x) > 0$ for alle $x \in]a,b[$. Tilfældene $A = \pm\infty$ og/eller $a = -\infty$ kan klares ved mindre ændringer i beviset. Det samme gælder, hvis i stedet $g'(x) < 0$.

Vi betragter først tilfældet $f(x) \to 0$ og $g(x) \to 0$ for $x \downarrow a$. Lad $\varepsilon > 0$. Hvis $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A$ for $x \downarrow a$ så vil der eksistere et tal $\delta > 0$, så

$$A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon$$

for alle $x \in]a, a+\delta[$. Heraf fås, at

$$(A-\varepsilon)\, g'(x) < f'(x) < (A+\varepsilon)\, g'(x)$$

for alle $x \in]a, a+\delta[$. Vi kan åbenbart antage, at f og g er definerede i a og har funktionsværdien 0 i dette punkt. Ved integration af uligheden ovenfor fås

$$\int_a^t (A-\varepsilon)\, g'(x)\, dx < \int_a^t f'(x)\, dx < \int_a^t (A+\varepsilon)\, g'(x)\, dx$$

for alle $t \in]a, a+\delta[$. Heraf fås umiddelbart

$$(A-\varepsilon)\, g(t) < f(t) < (A+\varepsilon)\, g(t)$$

Da nødvendigvis $g(t) > 0$ for $t \in]a, a+\delta[$ følger heraf

$$A - \varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < A + \varepsilon$$

for alle $t \in \left]a, a+\delta\right[$. Da vi altså til ethvert $\varepsilon > 0$ kan bestemme et $\delta > 0$ så ovenstående ulighed er opfyldt, har vi vist, at $\frac{f(t)}{g(t)} \to A$ for $t \downarrow a$. .

Betragt nu tilfældet hvor $g(x) \to \infty$ for $x \downarrow a$. Vi har nu som ovenfor, at der eksisterer et tal $\delta > 0$, så

$$(A-\varepsilon)\, g'(x) < f'(x) < (A+\varepsilon)\, g'(x)$$

for alle $x \in \left]a, a+\delta\right[$. Ved integration af denne ulighed fra s til t, hvor $a < s < t < a+\delta$ fås

$$\int_s^t (A-\varepsilon)\, g'(x)\, dx < \int_s^t f'(x)\, dx < \int_s^t (A+\varepsilon)\, g'(x)\, dx$$

Heraf fås

$$(A-\varepsilon)\,(g(t)-g(s)) < (f(t)-f(s)) < (A+\varepsilon)\,(g(t)-g(s))$$

Videre fås

$$A-\varepsilon < \frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)} < A+\varepsilon$$

Dette kan omskrives til

$$A-\varepsilon < \frac{\frac{f(s)}{g(s)} - \frac{f(t)}{g(s)}}{1-\frac{g(t)}{g(s)}} < A+\varepsilon$$

der igen kan omskrives til

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{g(t)}{g(s)}\right) + \frac{f(t)}{g(s)} < \frac{f(s)}{g(s)} < (A+\varepsilon)\left(1-\frac{g(t)}{g(s)}\right) + \frac{f(t)}{g(s)}$$

Da $\frac{f(t)}{g(s)} \to 0$ og $\frac{g(t)}{g(s)} \to 0$ for $s \downarrow a$ fås derfor, at der eksisterer et positivt tal $\delta_1 < \delta$, så $\left|\frac{f(t)}{g(s)}\right| < \varepsilon$ og $\left|\frac{g(t)}{g(s)}\right| < \varepsilon$ for $s \in \left]a, a+\delta_1\right[$. Derfor fås når $A > 0$ og ε er valgt mindre end A, at

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) - \varepsilon < \frac{f(s)}{g(s)} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon) + \varepsilon$$

Heraf følger igen påstanden. Hvis $A \leq 0$ skal sidste del ændres lidt.

Bevis nummer 2. For først at give idéen i beviset, lad A være et tal. Lad der være givet et vilkårligt lille interval omkring A. Lad os sige det er $\left]p, q\right[$. Vi vil så vise, at der findes et interval $\left]a, c\right[$, så $p < \frac{f(x)}{g(x)} < q$ for alle $x \in \left]a, c\right[$. Dette vil netop bevise, at $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$ for $x \to a$. I det følgende forudsætter vi dog ikke, at A er et tal.

Tag først tilfældet $-\infty \leq A < \infty$. Lad q være et vilkårligt tal større end A. Vælg r, så $A < r < q$. Af det givne følger, at når x ligger i et passende valgt interval $\left]a, c_1\right[$,så gælder

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

Betragt nu tal x og y, der opfylder $a < x < y < c_1$. Ifølge den udvidede middelværdisætning eksisterer der et tal ξ mellem x og y, så

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < r \tag{*}$$

Hvis nu forudsætningerne $f(x) \to 0$ og $g(x) \to 0$ for $x \to a$ er opfyldt, så får vi ved ovenfor at lade $x \to a$, at

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q$$

og det gælder åbenbart for alle $y \in]a, c_1[$.

Hvis i stedet forudsætningen $g(x) \to \infty$ for $x \to a$ er opfyldt, vælg så for det givne y tallet $c_2 \in]a, y[$, så g$(x) > g(y)$ og $g(x) > 0$ for $x \in]a, c_2[$. Gang nu (*) med $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$. Så finder vi

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < r\frac{g(x) - g(y)}{g(x)} = r - r\frac{g(y)}{g(x)}$$

altså

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Da $g(x) \to \infty$ for $x \to a$ kan vi bestemme et tal $c_3 \in]a, c_2[$, så vi for $x \in]a, c_3[$ har

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q$$

Under begge sæt forudsætninger har vi vist, at der findes et tal $c > a$, så $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ for alle $x \in]a, c[$. Hvis nu faktisk $A = -\infty$, så er vi færdige, idet dette viser, at $\frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty$ for $x \to a$. Hvis $-\infty < A \leq \infty$ kan vi på samme måde vise, at der til ethvert $p < A$ findes et tal $d > a$, så $\frac{f(x)}{g(x)} > p$ for alle $x \in]a, d[$. Hvis $A = \infty$ viser dette påstanden. Hvis $-\infty < A < \infty$, sæt $h = \min(c, d)$. Så har vi vist, at $p < \frac{f(x)}{g(x)} < q$ for $x \in]a, h[$. Dette beviser, at $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$ for $x \to a$. ■

Bemærkning 127 *Første bevis udnytter, at det for en differentiabel funktion f gælder, at f' er integrabel og $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$. Dette gælder ikke generelt for Riemann-integralet, men det gælder for det generaliserede Riemann-integral.*

Eksempel 128 *Vi skal for $x \to \pi$ undersøge*

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

Vi ser, at $f(x) = \sin^2 x \to 0$ og $g(x) = 1 + \cos x \to 0$ for $x \to \pi$. Vi har, at $g'(x) = -\sin x$, som er forskellig fra nul for $x \neq \pi$ i et interval omkring π. Vi kan altså bruge l'Hospitals regel. Vi finder

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\sin x \cos x}{-\sin x} = -2\cos x \to 2$$

for $x \to \pi$*. Derfor har vi også, at*

$$\lim_{x \to \pi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = 2$$

Bemærkning 129 *Som det undertiden (ofte?) er tilfældet, kan grænseværdien i eksemplet ovenfor udregnes uden brug af l'Hospitals regel. I dette tilfælde således:*

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} &= \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} \\ &= 1 - \cos x \to 2 \end{aligned}$$

for $x \to \pi$*.*

Eksempel 130 *Vi vil for* $x \to 0$ *undersøge*

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Med $f(x) = e^x - 1 - x$ *og* $g(x) = x^2$ *har vi* $f(x) \to 0$ *og* $g(x) \to 0$ *for* $x \to 0$*. Da også* $g'(x) = 2x \neq 0$ *for* $x \neq 0$ *kan vi bruge l'Hospitals regel:*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - 1}{2x}$$

Men tæller og nævner i denne nye brøk går begge mod nul. Vi har dermed et nyt problem, på hvilket vi vil bruge l'Hospitals regel. Nævnerens differentialkvotient er 2*, der jo er forskellig fra nul, så anvendelsen af l'Hospitals regel er iorden:*

$$\frac{e^x}{2} \to \frac{1}{2}$$

for $x \to 0$*. Derfor har vi også*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

og dermed

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Eksempel 131 *Vi vil for* $x \downarrow 0$ *undersøge* $x \ln x$*. Opførslen er ikke indlysende, da der er en tovtrækning mellem de to faktorer: Den første trækker mod* 0 *den anden mod* $-\infty$*. Udtrykket er jo ingen brøk, men kan omskrives til en sådan:*

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Da $g(x) = \frac{1}{x} \to \infty$ *for* $x \downarrow 0$ *og da* $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$*, kan vi bruge l'Hospitals regel:*

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$$

for $x \downarrow 0$*. Vi konkluderer, at* $x \ln x \to 0$ *for* $x \downarrow 0$*.*

Bemærkning 132 *Man kunne selvfølgelig også have omskrevet produktet til en brøk således:*

$$x \ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$$

l'Hospitals regel anvendt på denne brøk hjælper os dog ikke, idet vi får

$$\frac{1}{-\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}} = -x (\ln x)^2$$

hvis opførsel er endnu mere ukendt end opførslen af $x \ln x$.

Eksempel 133 *Vi ønsker at undersøge*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

for $n \to \infty$. *Hvad der sker er ikke indlysende, da det nok er rigtigt, at* $1 + \frac{x}{n}$ *begynder at ligne 1, når* n *bliver stor, men til gengæld skal det ganges med sig selv* n *gange, hvilket jo er et stort antal gange, når* n *er stor. Udtrykket er jo ikke en brøk, men dets logaritme kan skrives som en brøk:*

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Da både tæller og nævner $g(n) = \frac{1}{n}$ *går mod nul, og da* $g'(n) = -\frac{1}{n^2} \neq 0$, *kan vi bruge l'Hospitals regel:*

$$\frac{\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{x}{1 + \frac{x}{n}} \to x$$

for $n \to \infty$. *Altså har vi, at også* $\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) \to x$, *og dermed, at*

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Eksempel 134 *Vi vil for* $x \downarrow 0$ *undersøge opførslen af udtrykket*

$$\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Det er igen ikke indlysende, hvad der sker, idet de to led trækker i forskellig retning. Vi omskriver

$$\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} \ln x + 1\right)$$

Vi betragter $\sqrt{x} \ln x$. *Dette udtryk kan omskrives:* $\sqrt{x} \ln x = 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})$. *Men da* $t \ln t \to 0$ *for* $t \downarrow 0$, *får vi, at* $\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \to 0$ *for* $x \downarrow 0$. *Hermed konkluderer vi, at*

$$\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} \ln x + 1\right) \to \infty$$

for $x \downarrow 0$.

Eksempel 135 *Vi ønsker først at undersøge udtrykket*

$$u(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

for $x \to \infty$. *Vi omskriver* $u(x)$ *til*

$$u(x) = \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$$

Både tæller og nævner går mod uendelig for $x \to \infty$. *l'Hospitals regel anvendes:*

$$\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2x} \to 0$$

for $x \to \infty$. *Altså har vi også, at* $u(x) \to 0$ *for* $x \to \infty$. *Betragt dernæst udtrykket*

$$xu(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

Vi omskriver udtrykket til

$$xu(x) = \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{1}{x} e^{x^2}}$$

Det er klart, at tælleren går mod uendelig for $x \to \infty$, *men dette gælder også for nævneren, hvilket en hurtig anvendelse af l'Hospitals regel på brøken* $\frac{e^{x^2}}{x}$ *viser. Anvender vi nu l'Hospitals regel på det sidste udtryk for* $xu(x)$ *fås*

$$\frac{e^{x^2}}{\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} \to \frac{1}{2}$$

for $x \to \infty$. *Altså har vi også, at* $xu(x) \to \frac{1}{2}$ *for* $x \to \infty$. *Betragter vi dernæst udtrykket*

$$x^2 \left(xu(x) - \frac{1}{2} \right) = \frac{x \int_0^x e^{t^2} dt - \frac{1}{2} e^{x^2}}{x^{-2} e^{x^2}}$$

så ser vi, at nævneren går mod uendelig. Hvad tælleren angår, er det ikke så klart, men bemærk, at l'Hospitals regel ikke forudsætter noget om tælleren, når blot nævneren går mod uendelig. l'Hospitals regel bruges og giver

$$\frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{(-2x^{-3} + 2x^{-1}) e^{x^2}} = \frac{xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{-2x^{-2} + 2} \to \frac{1}{4}$$

for $x \to \infty$. *Altså har vi også, at* $x^2 \left(xu(x) - \frac{1}{2} \right) \to \frac{1}{4}$ *for* $x \to \infty$. *Vi har hermed fundet, at* $u(x)$ *for store værdier af* x *i det væsentlige er givet ved*

$$u(x) \cong \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3}$$

Man taler om en asymptotisk udvikling for $u(x)$. Flere led i en sådan asymptotisk udvikling for $u(x)$ fås lettest ved gentagen brug af delvis integration. I følgende Maple-kommando er disse integrationer automatiserede:
with(student,intparts):
N:=5:
*for k to N do u:=combine(expand(intparts(u,1/t^(2*k-1)))) end do;*

Resultatet er, at vi har

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^3}+\frac{3}{8x^5}+\frac{15}{16x^7}+\ldots+\frac{(2N)!}{N!}\cdot\frac{1}{(2x)^{2N+1}}+O\left(\frac{1}{x^{2N+3}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(2x)^{2n+1}}+O\left(\frac{1}{x^{2N+3}}\right) \end{aligned}$$

Dette udsagn betyder her konkret, at der til det givne N eksisterer en konstant C_N, så

$$\left|u(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(2x)^{2n+1}}\right|\leq\frac{C_N}{x^{2N+3}}$$

for alle $x\geq 1$. Bemærk dog, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(2x)^{2n+1}}$$

er divergent for alle $x\in R$. Dette betyder, at for enhver given værdi af x vil summen

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(2x)^{2n+1}}$$

kunne gøres vilkårligt stor ved blot at vælge N stor nok.

Eksempel 136

3.4 Differentiabilitet i eksceptionnelt punkt

Det følgende resultat kan ofte være nyttigt ved afgørelsen af om en funktion er differentiabel i et eksceptionnelt punkt.

Sætning 137 *Antag f er en reel funktion, der er kontinuert i $[a,b]$ og differentiabel i $]a,b]$.*

1. *Hvis $f'(x)\to\infty$ (eller $-\infty$) for $x\downarrow a$, så er f ikke differentiabel i a.*
2. *Hvis $f'(x)\to A$ for $x\downarrow a$, hvor A er et tal, så er f differentiabel fra højre i a med differentialkvotient A.*

Bevis. Middelværdisætningen anvendes på f på intervallet $[a, x]$, $x \in]a, b]$. Til x findes et tal $\xi \in]a, x[$, så

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

Begge resultater følger nu umiddelbart af definionen på differentiabilitet. F.eks. fås i første tilfælde, at

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to \infty \text{ for } x \downarrow a$$

hvorfor f ikke er differentiabel i a. ■

Eksempel 138 *$f(x) = \sqrt{x}$. Da $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty$ for $x \downarrow 0$ gælder, at f ikke er differentiabel i 0.*

Eksempel 139 *$f(x) = \arcsin(x)$. Da $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \infty$ for $x \uparrow 1$ og for $x \downarrow -1$ gælder, at f ikke er differentiabel i 1 og -1.*

Bemærkning 140 *Argumentet er ikke det ofte hørte: "Da man ikke kan dividere med nul, giver $f'(a)$ ingen mening. Derfor er f ikke differentiabel". $f'(a)$ kan kun skrives ned, hvis man allerede ved, at f er differentiabel i a. Det kan derfor ikke bruges til at vise, at f ikke er differentiabel!*

Man kunne måske tro, at forudsætningen $f'(x) \to \infty$ for $x \downarrow a$ kunne erstattes af forudsætningen f' ubegrænset i enhver omegn om a, eller måske af det endnu svagere, at $\lim_{x \downarrow a} f'(x)$ ikke eksisterede. At dette ikke er tilfældet viser følgende to eksempler.

Eksempel 141 *$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ for $x \neq 0, f(0) = 0$. Da $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = x \sin(\frac{1}{x}) \to 0$ for $x \to 0$ er f differentiabel i 0 med $f'(0) = 0$. Men $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ har ingen grænseværdi for $x \to 0$.*

Eksempel 142 *$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ for $x \neq 0, f(0) = 0$. Som ovenfor er f differentiabel i 0 med $f'(0) = 0$. Vi finder $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$, der er ubegrænset i enhver omegn om 0.*

Her er nogle eksempler at øve sig på.

Øvelse 143 *Betragt funktionen f givet ved $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Undersøg, om f er differentiabel i 0.*

Øvelse 144 *Betragt funktionen $f(x) = x^3 \arccos x$. Undersøg differentiabilitet i 1.*

Øvelse 145 *Vis, at funktionen f givet ved $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ for $x \neq 0$ og $f(0) = 1$, er differentiabel i 0 med differentialkvotient 0. Gør det på to måder:*

1. *Ved brug af definitionen på differentiabilitet.*
2. *Ved brug af ovenstående sætning.*

Kapitel 4

Specielle Funktioner

Med udtrykket speciel funktion menes i denne fremstilling en funktion, som har fået et af alle anerkendt navn. Eksempler på sådanne funktioner er ln, exp, sin, cos, tan og cot. Vi giver i det følgende flere eksempler.

4.1 Elementære specielle funktioner

4.1.1 De omvendte trigonometriske funktioner

Afsnittet kunne blive endog meget kort: De trigonometriske funktioner er ikke injektive - en umulig egenskab for en periodisk funktion - derfor har de ingen omvendte funktioner. Men netop p.gr.a. periodiciteten, kan man nøjes med kendskab til den pågældende trigonometriske funktion på et vilkårligt periodeinterval. Eksempelvis er sinusfunktionen, der jo er periodisk med perioden 2π, helt fastlagt, hvis den kendes på intervallet $]-\pi, \pi]$. Desuden har sinusfunktionen egenskaben $\sin(\pi - x) = \sin x$, for alle $x \in R$. Dermed bliver det nok at kende sinusfunktionen på intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. På dette interval er sinusfunktionen imidlertid voksende. Indskrænker vi derfor blikket til dette interval, ja så har sinusfunktionen en omvendt funktion.

Definition 146 *Funktionen* arcsin *er den omvendte funktion til restriktionen af sinusfunktionen til intervallet* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Dens definitionsområde er altså* $[-1, 1]$, *og for alle* $x \in [-1, 1]$, *gælder at*

$$\arcsin x = y \Longleftrightarrow x = \sin y \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Definition 147 *Funktionen* arccos *er den omvendte funktion til restriktionen af cosinusfunktionen til intervallet* $[0, \pi]$. *Dens definitionsområde er altså* $[-1, 1]$, *og for alle* $x \in [-1, 1]$, *gælder at*

$$\arccos x = y \Longleftrightarrow x = \cos y \wedge y \in [0, \pi]$$

Definition 148 *Funktionen* arctan *er den omvendte funktion til restriktionen af tangensfunktionen til intervallet* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Dens definitionsområde er altså* R, *og for alle* $x \in R$, *gælder at*

$$\arctan x = y \Longleftrightarrow x = \tan y \wedge y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Bemærkning 149 *I mange fremstillinger staves navnene med stort A. Alternative skrivemåder er (specielt i amerikansk litteratur)* $\sin^{-1} x$ *for* $\arcsin x, \cos^{-1} x$ *for* $\arccos x$ *og* $\tan^{-1} x$ *for* $\arctan x$. *Det må kraftigt understreges, at* $\sin^{-1} x$ ***ikke*** *betyder den reciprokke til* $\sin x$, *altså ikke* $\frac{1}{\sin x}$.

Sætning 150 *Funktionerne* arcsin, arccos *og* arctan *har følgende egenskaber:*

1. *Alle 3 er kontinuerte funktioner.*
2. *Alle 3 er differentiable (for* arcsin *og* arccos *undtagen i* ± 1*). Differentialkvotienterne er*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx} \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

3. arcsin *og* arctan *er ulige og voksende.* arccos *er aftagende (og hverken lige eller ulige).*

Bevis. Første påstand følger af, at den omvendte funktion til en kontinuert funktion (defineret på et interval) er kontinuert. Anden påstand følger af, at den omvendte funktion f^{-1} til en funktion f , der er differentiabel i x med $f'(x) \neq 0$, selv er differentiabel i $y = f(x)$ med differentialkvotient

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Hermed fås med $f = \sin$ og $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, y = \sin x$, at

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-y^2}}$$

men da $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ er $\cos x > 0$, så vi skal vælge fortegnet $+$. Derfor fås

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

hvilket vi skulle vise. Differentialkvotienterne for arccos og arctan findes på ganske analog måde.

Det gælder generelt, at den omvendte funktion til en voksende funktion er voksende, og at den omvendte funktion til en aftagende funktion er aftagende. Deraf følger en del af tredie påstand. Resten følger af, at det også gælder generelt, at den omvendte funktion f^{-1} til en ulige funktion f er ulige. Dette kan vises således:

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}(-x) \Longleftrightarrow -x = f(y) \Longleftrightarrow x = -f(y) = f(-y) \\ &\Longleftrightarrow -y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow y = -f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Altså ser vi, at $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ for alle x. ■

Bemærkning 151 *Summen af de afledede af* arcsin *og* arccos *er åbenbart 0. Altså*

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x + \arccos x) = 0$$

for alle $x \in \,]-1,1[$. *Dermed er* $\arcsin + \arccos$ *en konstant i* $]-1,1[$. *Men da funktionen er kontinuert på intervallet* $[-1,1]$ *er den konstant også på dette interval. Da* $\arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, *har vi altså, at*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

for alle $x \in [-1,1]$. *Dette resultat siger egentlig ikke andet end at summen af de to spidse vinkler i en retvinklet trekant er* $\frac{\pi}{2}$.

Øvelse 152 *Vis, at for alle* $x \neq 0$ *gælder*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} signum(x)$$

hvor $signum(x)$ *er* 1 *for* $x > 0$ *og* -1 *for* $x < 0$.

4.1.2 De hyperbolske funktioner og deres omvendte funktioner

Den velkendte definition på de trigonometriske funktioner sin og cos er jo følgende: Lad P være det punkt på enhedscirklen, der ligger i en vinkelafstand fra x-aksen på v (regnet med fortegn og målt i radianer). Dette punkt har et sæt koordinater, der hver for sig må være en funktion af v. Punktet P's x-koordinat kaldes $\cos v$ og det y-koordinat kaldes $\sin v$.

Vi skal nu indføre to funktioner, hvis navne minder om sin og cos. De kaldes henholdsvis sinh og cosh. Disse betegnelser er forkortelser for *sinus hyperbolsk* og *cosinus hyperbolsk*. De er i en vis forstand meget mere banale end de trigonometriske funktioner sin og cos, idet de blot defineres ud fra eksponentialfunktionen, som følger.

Definition 153 *For alle* $x \in R$ *sættes*

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \\ \cosh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Man definerer funktionerne tanh og coth analogt med de trigonometriske, nemlig således:

Definition 154 *For alle $x \in R$ sættes*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

og for $x \neq 0$ sættes

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Bemærkning 155 *Idet eksponentialfunktionens definitionsområde kan udvides til de komplekse tal (uden tab af den fundamentale exp-regel) kunne vi ligeså godt med det samme have defineret de hyperbolske funktioner i C. Vi skal dog næsten udelukkende gøre brug af dem som reelle funktioner af en reel variabel.*

Sætning 156 *De hyperbolske funktioner* sinh *og* cosh *har følgende egenskaber:*

1. *Begge er differentiable overalt og* $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$ *og* $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ *for alle* $x \in R$.
2. sinh *er voksende og ulige.* cosh *er lige.*
3. *Der gælder for alle $x \in R$, at* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *("Den hyperbolske idiotformel").*
4. *Der gælder for alle $x \in R$, at* $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$ *("Dobbeltargumentformel for* cosh*").*
5. *Der gælder for alle $x \in R$, at* $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$ *("Dobbeltargumentformel for* sinh*").*

Bevis. Beviset for 1 og 2 overlades til læseren. Påstand 3 og 4 vises således:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x \pm \sinh^2 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)^2 \pm \left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) \pm \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) = \cosh 2x & \textit{med} \quad + \\ 1 & \textit{med} \quad - \end{cases}
\end{aligned}$$

Påstand 5 vises på lignende vis. ■

Definition 157 *Den omvendte funktion til* sinh *kaldes* arsinh *("area sinus hyperbolsk"). Den er altså bestemt ved ækvivalensen*

$$y = ar\sinh x \Longleftrightarrow x = \sinh y$$

Definition 158 *Den omvendte funktion til restriktionen af* cosh *til intervallet* $[0, \infty[$ *kaldes* arcosh *("area cosinus hyperbolsk). Den er altså bestemt ved ækvivalensen*

$$y = ar\cosh x \Longleftrightarrow x = \cosh y \wedge y \geq 0$$

Bemærkning 159 *I mange fremstillinger staves navnene med stort A. Alternative skrivemåder er (specielt i amerikansk litteratur)* $\sinh^{-1} x$ *for arsinhx og* $\cosh^{-1} x$ *for arcoshx. I Maple skal stavemåden (mærkværdigvis) være arcsinh og arccosh.*

Da sinh og cosh kan udtrykkes ved eksponentialfunktionen, kommer det nok ikke som nogen stor overraskelse, at de omvendte funktioner arsinh og arcosh kan udtrykkes ved den omvendte funktion til eksponentialfunktionen, nemlig logaritmefunktionen.

Sætning 160 *arsinh kan udtrykkes ved logaritmefunktionen således*

$$ar\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

for alle $x \in R$. *Funktionen arcosh kan udtrykkes ved logaritmefunktionen således*

$$ar\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

for alle $x \geq 1$.

Bevis. Vi har for $x \in R$

$$\begin{aligned} y &= ar\sinh x \Longleftrightarrow x = \sinh y = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) \\ &\Longleftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Da $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ for alle $x \in R$, og da $e^y < 0$ for alle $y \in R$, har vi altså

$$y = ar\sinh x \Longleftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

hvoraf fås, at arsinh $x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

For arcosh forløber argumentet således. For $x \geq 1$ har vi

$$\begin{aligned} y &= ar\cosh x \Longleftrightarrow x = \cosh y = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) \wedge y \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \wedge y \geq 0 \Longleftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \wedge y \geq 0 \end{aligned}$$

Da $x - \sqrt{x^2 - 1} < 1 \Longleftrightarrow x - 1 < \sqrt{x^2 - 1} \Longleftrightarrow (x-1)^2 < x^2 - 1 \Longleftrightarrow x - 1 < x + 1 \Longleftrightarrow -1 < 1$, og da $e^y \geq 1$ for $y \geq 0$ fås

$$y = ar\cosh x \Longleftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

hvoraf fås, at arcosh $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$. ■

4.2 Andre specielle funktioner

Bortset fra to eksempler, gammafunktionen og Lamberts W-funktion, gør vi her kun lige netop opmærksom på eksistensen af et væld af specielle funktioner. Maple kender særdeles mange af dem, og mange er omtalt i Schaums håndbog.

4.2.1 Gammafunktionen

Gammafunktionen defineres således

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

for $x > 0$. Definitionen kan udstrækkes til den komplekse plan, idet man i første omgang forlanger, at $\operatorname{Re} x > 0$. Vi vil kun betragte $\Gamma(x)$ for reelle x. Integralet, der definerer funktionen er jo uegentligt, så det første der må afklares er, om integralet overhovedet er konvergent.

Sætning 161 *For $x > 0$ er det uegentlige integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

konvergent. For $x \leq 0$ er integralet divergent.

Bevis. Hvis $0 < x < 1$ er integralet uegentligt af to grunde: Foruden at være et integral over $[0, \infty[$, har integranden en singularitet i 0. Vi deler derfor integralet op (uanset om $x < 1$ eller $x \geq 1$):

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = I_1 + I_2$$

Vi vil bruge sammenligningssætningen for uegentlige integraler på begge integraler, men på forskellig vis. På integralet I_1 vurderes integranden således

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$$

gældende for alle $t > 0$ og $x > 0$. Men integralet $\int_0^1 t^{x-1} dt$ er enten et egentligt (nemlig for $x \geq 1$) eller et konvergent uegentligt integral (nemlig for $0 < x < 1$). Derfor er det samme tilfældet for I_1. På integralet I_2 vurderes integranden derimod således: For $t \geq 1$ og $x > 0$ har vi

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} t^x$$

Funktionen $t \mapsto e^{-t} t^x$ har størsteværdi for $t = x$, og den er $M_1 = e^{-x} x^x$. Altså har vi for alle $t \geq 0$, at $e^{-t} t^x \leq M_1$, men så gælder også, at

$$\left(\frac{t}{2}\right)^x e^{-\frac{1}{2}t} \leq M_1$$

for alle $t \geq 0$. Dette kan omskrives til

$$t^x e^{-t} \leq M_1 2^x e^{-\frac{1}{2}t} = M_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

når $M_2 = M_1 2^x$. Altså har vi

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq M_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

Men integralet $\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}t} dt$ er konvergent. Derfor er også I_2 konvergent. Da både I_1 og I_2 er konvergente, er $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ konvergent.

Når $x \leq 0$ gælder for $t \leq 1$

$$0 \leq e^{-1} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1}$$

Men det uegentlige integral $\int_0^1 t^{x-1} dt$ er divergent for $x \leq 0$, så det samme er I_1, og dermed $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. ■

Sætning 162 *Gammafunktionen opfylder følgende ligning for $x > 0$*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Bevis. Ved delvis integration fås for $c > 0$ og $x > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^c e^{-t} t^x dt &= -\left[e^{-t} t^x\right]_0^c + x \int_0^c e^{-t} t^{x-1} dt \\
&= -e^{-c} c^x + x \int_0^c e^{-t} t^{x-1} dt
\end{aligned}$$

Men i beviset ovenfor, så vi, at der fandtes en konstant M_2, så $t^x e^{-t} \leq M_2 e^{-\frac{1}{2}t}$, for $t \geq 0$. D.v.s. at $c^x e^{-c} \to 0$ for $c \to \infty$. Ved denne grænseovergang fås derfor af ligningen ovenfor, at

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \lim_{c \to \infty} \int_0^c e^{-t} t^x dt \\
&= \lim_{c \to \infty} \left(-e^{-c} c^x + x \int_0^c e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\
&= \lim_{c \to \infty} \left(-e^{-c} c^x \right) + \lim_{c \to \infty} \left(x \int_0^c e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\
&= x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

■

Korollar 163 *For $n \in N \cup \{0\}$ gælder*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Bevis. Vi har

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

Af sætningen ovenfor fås derfor, at

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3! \\
\Gamma(5) &= \Gamma(4+1) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4!
\end{aligned}$$

o.s.v. (alternativ til "o.s.v." er et induktionsbevis). ■

Vi kan altså opfatte gammafunktionen som en udvidelse af fakultetsfunktionen, der jo kun er defineret på ikke-negative hele tal.

Definition 164 *For $x < 0$ defineres $\Gamma(x)$ succesivt således: Først sættes for $-1 < x < 0$*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

Hermed er $\Gamma(x)$ ialt defineret for $x \in]-1, \infty[\setminus \{0\}$. Dernæst sættes for $-2 < x < -1$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

Hermed er $\Gamma(x)$ ialt defineret for $x \in]-2, \infty[\setminus \{0, -1\}$. Således fortsættes. På denne måde er $\Gamma(x)$ fastsat for alle $x \in R$ bortset fra ikke-positive hele tal ($0, -1, -2, -3, -4, \dots$).

Bemærkning 165 *I Maple betegnes gammafunktionen med GAMMA. For at se grafen for gammafunktionen kan man prøve kommandoen plot(GAMMA,-5..5,-5..5,discont=true);*

4.2.2 Lamberts W-funktion

Funktionen $w \longmapsto we^w$ er voksende for $w \geq -1$ og aftagende for $w \leq -1$. Den omvendte funktion til $w \longmapsto we^w, w \in [-1, \infty[$ er Lamberts W-funktion. Den betegnes i Maple med LambertW eller LambertW(1,...). Den er defineret for $x \geq -e^{-1}$ ved

$$y = LambertW(x) \Longleftrightarrow x = ye^y \wedge y \in [-1, \infty[$$

Den omvendte funktion til $w \longmapsto we^w, w \in]-\infty, -1]$ er en anden gren af Lamberts W-funktion. Den betegnes i Maple med LambertW$(-1, ...)$. Den er defineret for $x \geq -e^{-1}$ ved

$$y = LambertW(-1, x) \Longleftrightarrow x = ye^y \wedge y \in]-\infty, -1]$$

Vil man se et plot af de to omtalte grene af Lamberts W-funktion kan man prøve kommandoen plot([LambertW(x),LambertW(-1,x)], x=-.5..4,numpoints=200);

Indenfor de komplekse tal er der uendeligt mange grene af Lamberts W-funktion.

Kapitel 5

Integrabilitet

5.1 Ubegrænsede Funktioner. Singulariteter

Definition 166 *En funktion f kaldes opadtil begrænset i intervallet I, hvis dens graf ligger under en vandret linie, altså hvis f opfylder en ulighed af formen $f(x) \leq M$ for alle $x \in I$, og hvor M er et tal. Den kaldes nedadtil begrænset i I, hvis dens graf ligger over en vandret linie, altså hvis f opfylder en ulighed af formen $f(x) \geq m$ for alle $x \in I$, og hvor m er et tal. Funktionen kaldes begrænset, hvis den er såvel opadtil som nedadtil begrænset.*

Eksempel 167 *Funktionen f givet ved $f(x) = 7 - x^2$ er opadtil begrænset, da grafen holder sig under linien $y = 7$. Funktionen g givet ved $g(x) = 2(x-3)^2 - 13$ er nedadtil begrænset, da dens graf holder sig over $y = -13$.*

Det kan være praktisk at have et navn for det sted (/de steder) "hvor det går galt" eller "hvor funktionen eksploderer". Derfor den næste definition.

Definition 168 *Lad I være et interval, og lad x_0 ligge i I eller være et af I's endepunkter. En funktion f siges at have en singularitet i intervallet I beliggende i punktet x_0 (kort: at være singulær i x_0), hvis der findes en følge $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ af tal fra I, med $x_n \to x_0$, så $f(x_n) \to \infty$ (eller $-\infty$) for $n \to \infty$.*

Bemærkning 169 *Det følger umiddelbart af definitionen, at hvis f har en singularitet i I, så må f være ubegrænset i I. For den omvendte påstand se senere.*

Eksempel 170 *Funktionerne* $\sin, \cos, \arctan$ *er begrænsede på hele R. Funktionen* $\tan$ *er ubegrænset på intervallet* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *og har singulariteter i $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$. Funktionen $x \mapsto x \sin x$ er ubegrænset på R, og funktionen $x \mapsto \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ er ubegrænset på intervallet* $]0,1[$, *med en singularitet i 0. Funktionen $x \longmapsto e^x$ er på R nedadtil begrænset, men ikke opadtil begrænset.*

Eksempel 171 *Funktionen* $x \longmapsto e^{1/x}$ *defineret for* $x \neq 0$ *har på intervallerne* R *og* $]0, \infty[$ *en singularitet i 0, da jo* $e^{1/x} \to \infty$ *for* $x \to 0_+$*. Derimod har den ikke en singularitet på intervallet* $]-\infty, 0[$ *, da* $e^{1/x} \to 0$ *for* $x \to 0_-$*.*

Øvelse 172 *Hvilke af følgende funktioner er begrænsede på R:* $\sinh, \cosh, \tanh,$ $x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$ *?*

Øvelse 173 *Er funktionen* $x \longmapsto \frac{1-e^x}{x}$ *(* $x \neq 0$ *) begrænset? Har den en singularitet i 0?*

Hvad har begreberne singularitet og ubegrænsethed med hinanden at gøre? Der gælder:

Sætning 174 *Lad* I *være et begrænset interval (altså et interval, hvor ingen af enderne er* $\pm\infty$*). Så gælder, at en funktion* f *er ubegrænset på* I*, hvis og kun hvis* f *har mindst én singularitet i* I *beliggende i selve* I *eller i et af dets endepunkter.*

Bevis. Som bemærket under definitionen på begrebet singularitet, er en funktion med en singularitet ubegrænset. Antag omvendt, at f er ubegrænset opadtil (*nedadtil* håndteres analogt) på intervallet I. Derfor findes der et tal $x_1 \in I$, så $f(x_1) > 1$. Funktionen f er enten også ubegrænset på den første halvdel af I eller på den anden halvdel af I (evt. på begge). Derfor findes der et tal x_2 i det pågældende interval, så $f(x_2) > 2$. Dette interval af halv længde deles igen i to. Funktionen er nu enten også ubegrænset på den første halvdel af dette eller på den anden halvdel (evt. på begge). Dermed findes der et tal x_3 i dette interval, så $f(x_3) > 3$. På den måde fortsættes. Ved denne intervalindsnævring bestemmes et tal x_0, så $x_n \to x_0$, og $f(x_n) > n$ for alle $n \geq 1$. Altså har vi, at $f(x_n) \to \infty$ for $n \to \infty$. Funktionen har derfor en singularitet i intervallet I beliggende i punktet x_0. ■

5.2 Definitionen på Integrabilitet og Integral

Idéen med definitionen af integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er, at dette med rimelighed skal kunne *tolkes* som arealet under grafen for f og over x-aksen (når iøvrigt grafen ligger over x-aksen).

Definition 175 *Ved en inddeling af et interval* $[a, b]$ *forstås en endelig følge af tal* $X = (x_i)_{i=0}^n$ *med* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$*. Ved en mærket indeling* (X, T) *forstås en inddeling* $X = (x_i)_{i=0}^n$ *og et talsæt af mærker* $T = (t_i)_{i=1}^n$*, hvor* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *for alle* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*
Ved Riemann-summen for funktionen f *defineret på* $[a, b]$ *svarende til den mærkede inddeling* (X, T) *forstås summen*

$$R(X, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Vi skal nedenfor indføre det generaliserede Riemann-integral, men erindrer først om definitionen af det sædvanlige bestemte integral, *Riemann-integralet.*

Definition 176 *Lad f være en funktion defineret på intervallet $[a,b]$, hvor a og b er tal (altså ikke hverken $\pm\infty$). Funktionen f kaldes Riemann-integrabel på $[a,b]$, hvis der findes et tal A, så der til ethvert $\varepsilon > 0$, eksisterer et tal $\delta > 0$, så der for enhver mærket inddeling (X,T), $X = (x_i)_{i=0}^n$, $T = (t_i)_{i=1}^n$ med $\max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$ gælder*

$$A - \varepsilon < R(X,T) < A + \varepsilon$$

Tallet A kaldes da integralet og betegnes med $\int_a^b f(x)\,dx$.

Riemann-integralet har sit navn efter den tyske matematiker Bernhard Riemann, 1826-1866.

Riemann-integralet lider af flere skavanker. To af disse er, at ingen ubegrænset funktion er integrabel, og at integrationsintervallet skal være endeligt. Derfor vil vi i denne fremstilling indføre det generaliserede Riemann-integral. Vi vil altså definere $\int_a^b f(x)\,dx$ også i de tilfælde hvor $a = -\infty, b = \infty$ eller f er ubegrænset. I det følgende antages det derfor ikke (med mindre det siges eksplicit), at a og b er tal.

Definition 177 *Ved de udvidede reelle tal $\overline{R}$ forstås de reelle tal og de to symboler $-\infty$ og ∞. Altså $\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$.*

Bemærkning 178 *Intervallet $[-\infty, b]$ vil blive betragtet som lukket, medens begge intervallerne $[-\infty, b[$ og $]-\infty, b[$ vil blive betragtet som åbne. Intervallet $\overline{R}$ er både åbent og lukket.*

Definition 179 *Ved et nåleøje γ på et interval $[a,b] \subseteq \overline{R}$ forstås en funktion defineret på $[a,b]$ med åbne delintervaller af $\overline{R}$ som værdier. For ethvert $t \in \overline{R}$ forlanges, at $t \in \gamma(t)$.*

Definition 180 *En mærket inddeling (X,T), $X = (x_i)_{i=0}^n$, $T = (t_i)_{i=1}^n$ af intervallet $[a,b]$ siges at kunne slippe gennem nåleøjet γ, hvis $[x_{i-1}, x_i] \subseteq \gamma(t_i)$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Definition 181 *Lad f være defineret på $[a,b] \subseteq \overline{R}$ med værdier i R. Funktionen siges at være generaliseret Riemann-integrabel på $[a,b]$, hvis der findes et tal (!) A, så der til ethvert $\varepsilon > 0$, eksisterer et nåleøje γ, så der for enhver mærket inddeling $X = (x_i)_{i=0}^n$, $T = (t_i)_{i=1}^n$, der kan slippe gennem nåleøjet gælder*

$$A - \varepsilon < R(X,T) < A + \varepsilon$$

Hvis $a = -\infty$ udelades første led i summen. Hvis $b = \infty$ udelades sidste led i summen. Tallet A kaldes da integralet og betegnes med $\int_a^b f(x)\,dx$.

Bemærkning 182 *På grund af bemærkningerne om udeladelser, når $a = -\infty$ eller $b = \infty$, er det (heldigvis) ikke nogensinde nødvendigt at definere f i hverken $\pm\infty$.*

Bemærkning 183 *Vi skal i det følgende (med en enkelt undtagelse) udelukkende benytte det generaliserede Riemann-integral og vil derfor udelade ordene 'generaliseret' og 'Riemann'.*

Sæt nu, at der fandtes et nåleøje på $[a, b]$, hvorigennem ingen mærket inddeling kunne slippe. Så ville iflg. definitionen på integrabilitet enhver funktion være iintegrabel på $[a, b]$, uanset hvordan den iøvrigt var beskaffen. Et sådan nåleøje findes dog ikke:

Sætning 184 *For ethvert nåleøje γ på $[a, b]$ eksisterer der en mærket inddeling, der kan slippe gennem γ.*

Sætning 185 *Hvis f er Riemann-integrabel i sædvanlig forstand (efter den første definition) på det begrænsede interval $[a, b]$ med integral A, så er f også integrabel efter den udvidede definition med integral A.*

Bevis. Antag, at f er Riemann-integrabel i sædvanlig forstand på det begrænsede interval $[a, b]$ med integral A.Vi skal vise,at f er integrabel efter den udvidede definition med integral A. Lad derfor $\varepsilon > 0$ være givet. Bestem $\delta > 0$, så der for enhver mærket inddeling $(X, T), X = (x_i)_{i=0}^n, T = (t_i)_{i=1}^n$ med $\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$ gælder

$$A - \varepsilon < R(X, T) < A + \varepsilon$$

Definér nåleøjet γ ved $\gamma(s) = \left]s - \frac{\delta}{2}, s + \frac{\delta}{2}\right[$ for alle $s \in [a, b]$. Lad (X, T) være en mærket inddeling, der kan slippe gennem nåleøjet γ. Da vi for all i har $[x_{i-1}, x_i] \subseteq \gamma(t_i) = \left]t_i - \frac{\delta}{2}, t_i + \frac{\delta}{2}\right[$, følger, at $x_i - x_{i-1} < \delta$ for alle i, og derfor, at $A - \varepsilon < R(X, T) < A + \varepsilon$. Heraf følger påstanden. ■

Bemærkning 186 *Denne sætning siger altså bl.a., at alle de funktioner, som vi hidtil har anset for integrable, stadig er integrable efter den nye definition. Dermed gælder den nyttige sætning, at en funktion, der er kontinuert på et lukket og begrænset interval $[a, b]$, er integrabel.*

Eksempel 187 *Ved Maple's hjælp kan vi let illustrere Riemann-summen*

$$R(X, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

når t_i'erne enten vælges i midten af delintervallerne eller i deres venstre eller højre endepunkter. Vi vil undersøge $\int_0^\pi \sin x \, dx$. Først vælges t_i'erne i midtpunkterne:

with(student):
middlebox(sin(x), x=0..Pi, 8);

M:=middlesum(sin(x), x=0..Pi, 8);
value(M);
evalf(M);

Dernæst prøver vi højre endepunkter:
rightbox(sin(x), x=0..Pi, 8);
R:=rightsum(sin(x), x=0..Pi, 8);
value(R);
evalf(R);
Prøv at udskifte right med left. Prøv også at ændre antal delintervaller (sidste argument i kommandoerne, 8 i eksemplet) til f.eks. 16.

5.3 Egenskaber ved integralet

Det bestemte integral er en lineær operator. Hermed menes:

Sætning 188 *Lad f og g være integrable på $[a,b]$, så er $f+g$ integrabel med*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

og hvis k er en konstant, så er kf integrabel og

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Sætning 189 ***Indskudssætningen.*** *Lad $a<c<b$. Så er f integrabel på $[a,b]$, hvis og kun hvis f er integrabel på både $[a,c]$ og $[c,b]$. I bekræftende fald gælder*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Sætning 190 *Hvis f er integrabel på intervallet $[a,b]$, så er funktionen F givet ved $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ (for alle $x\in[a,b]$) kontinuert på $[a,b]$.*

Sætning 191 *Hvis f er integrabel på $[a,c[$ for ethvert $c\in\,]a,b[$, så er f integrabel på $[a,b]$, hvis og kun hvis $\int_a^c f(t)\,dt$ har en grænseværdi for $c\uparrow b$.*

Definition 192 *En mængde af tal kaldes tællelig (eller numerabel), hvis den kan opskrives som en følge: $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$. Anderledes sagt mængden M er tællelig, hvis der findes en bijektion $f\colon N \curvearrowright M$, hvor N er de naturlige tal.*

Eksempel 193 *N er tællelig.Mængden $\left\{\frac{1}{n}|n\in N\right\}$ er tællelig. Z (mængden af hele tal) er tællelig. Mængden af lige hele tal er tællelig. Q (mængden af rationale tal) er tællelig, men det er ikke indlysende. R er* ikke *tællelig, hvilket heller ikke er indlysende.*

Sætning 194 *Hvis to funktioner afviger fra hinanden i endeligt eller tælleligt mange punkter, og hvis den ene er integrabel på et interval* $[a, b]$*, så er den anden også, og deres integraler er lige store.*

Bemærkning 195 *Derfor vil det ikke genere os, hvis en integrand ikke er defineret i et eller andet punkt af integrationsintervallet. Vi kan jo tænke os den defineret til en eller anden værdi i det punkt. Viser det sig, at den omdefinerede funktion er integrabel med integral* A*, så vil vi sige, at den oprindelige funktion er integrabel med integral* A*.*

Eksempel 196 *Funktionen* f *defineret ved* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *for* $x \neq 0$ *og* $f(0) = 1$ *er kontinuert, da* $\frac{\sin x}{x} \to 1$ *for* $x \to 0$*. Derfor er* f *integrabel på (f.eks.) intervallet* $[-\pi, \pi]$*. Men så er, ifølge ovenstående sætning, også funktionen* g *givet ved* $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ *for* $x \neq 0$ *og* $g(0) = 67$ *integrabel på* $[-\pi, \pi]$ *og de to funktioner har samme integral. Derfor vil dette integral blot blive skrevet således*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

En skrivemåde, der ikke afslører, hvad integrandens værdi er for $x = 0$*, ja faktisk har integranden jo ingen værdi for* $x = 0$*.*

Definition 197 *Ved en stamfunktion (ubestemt integral) til en given funktion* f *defineret på* $D_f \subseteq R$*, forstås en differentiabel funktion* F *defineret på* $D_F \supseteq D_f$*, hvis afledede er* f*, d.v.s.* $F'(x) = f(x)$ *for alle* $x \in D_f$*.*

Sætning 198 *(1) Hvis* F *og* G *er stamfunktioner til* f *på intervallet* I*, så er* $F - G$ *konstant på* I*. (2) Hvis* F *er en stamfunktion til* f *og* C *er en konstant, så er også* $F + C$ *en stamfunktion til* f*.*

Bevis. (1) Lad $H = F - G$, så har vi, at $H' = F' - G' = f - f = 0$. På intervallet I er H derfor konstant. (2) $(F + C)' = F' = f$. ■

Bemærkning 199 *Med symbolet* $\int f(x)\,dx$ *vil vi normalt forstå en eller anden uspecificeret stamfunktion til* f*. Vi skriver f.eks.* $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$*, men er selvfølgelig klar over, at vi også kunne skrive* $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + 54$*.*

Definition 200 *En funktion* F *(med værdier i* R*) kaldes kontinuert i* $-\infty$*, hvis* $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ *eksisterer (som et tal!). Tilsvarende kaldes* F *kontinuert i* ∞*, hvis* $\lim_{x \to \infty} F(x)$ *eksisterer (som et tal!). Vi vil undertiden (lidt modvilligt) benytte skrivemåden* $F(-\infty)$ *og* $F(\infty)$ *for disse to grænseværdier.*

Definition 201 *Ved en primitiv til funktionen* f *på intervallet* $I \subseteq \overline{R}$ *forstås en på* I *kontinuert funktion* F*, der er differentiabel i* I *med* $F'(x) = f(x)$ *pånær i endeligt eller tællleligt mange punkter.*

Bemærkning 202 *En primitiv* F *kan ikke være differentiabel i noget singularitetspunkt* x_1 *for* f*. Dette kan vises generelt, men hvis faktisk* $f(x) \to \infty$ *for*

$x \to x_1$, så fås det af middelværdisætningen, at der til ethvert $x \neq x_1$ findes et tal ξ mellem x og x_1, så

$$\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = f(\xi)$$

Men højre side vil kunne gøres større end et vilkårligt tal ved blot at vælge x tæt nok på x_1. Men så kan $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ ikke have nogen grænseværdi for $x \to x_1$.

Sætning 203 ***Differential- og integralregningens fundamentalsætning.*** *Hvis f har en primitiv F på intervallet $[a, b]$, så er f integrabel på $[a, b]$ med integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sætning 204 *Lad f være kontinuert på det lukkede og begrænsede interval $[a, b]$. Så har:f en stamfunktion på intervallet $[a, b]$.*

Korollar 205 *Hvis funktionen f er kontinuert på intervallet I og $c \in I \cap R$, så er funktionen F givet ved $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ (for alle $x \in I$) en stamfunktion til f på I.*

Korollar 206 *Hvis F er en primitiv for f på intervallet $[a, b[$, så er f integrabel på $[a, b]$, hvis og kun hvis $\lim_{x\uparrow b} F(x)$ eksisterer.*

Udregning af et integral eller afgørelsen af om det overhovedet eksisterer er ingenlunde altid en simpel sag. Ofte er delvis integration en hjælp:

Sætning 207 *Lad F og G være primitiver for f og g på $[a, b]$. Så gælder, at fG er integrabel, hvis og kun hvis gF er integrabel, og vi har*

$$\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = [F(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx$$

Bevis. Ved differentiation af produktet FG fås på nær evt. i tælleligt mange punkter

$$(FG)' = fG + Fg$$

Men iflg. den fundamentale sætning er $(FG)'$ integrabel. Hvis derfor gF er integrabel, så må også $fG = (FG)' - gF$ være integrabel. Da integralet af $(FG)'$ er $[F(x)\,G(x)]_a^b$ følger resultatet. ■

En anden nyttig teknik er integration ved substitution. Vi giver to versioner. Den første bygger på primitiver og udnytter fundamentalsætningen:

Sætning 208 *Antag, at f har den primitive F på intervallet $[c, d]$. Antag, at g er kontinuert på $[a, b]$ med billedmængde $[c, d]$ og differentiabel på nær evt. i tælleligt mange punkter. Antag yderligere enten, at $F' = f$ overalt i $[c, d]$ eller, at ligningen $g(x) = t$ højst har tælleligt mange løsninger for $x \in [a, b]$ uanset*

$t \in [c, d]$. Så gælder, at funktionen $x \mapsto f(g(x))\, g'(x)$ er integrabel på $[a, b]$ med integral

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

Her tillades det, at g har $\pm\infty$ som mulige værdier. Bemærk, at formlen kan læses fra højre til venstre eller omvendt.

Bevis. Lad F være en primitiv til f, så gælder altså, at $F'(t) = f(t)$ pånær evt. tælleligt mange værdier af t. Den sammensatte funktion $F \circ g$ er under de i sætningen nævnte forudsætninger differentiabel pånær i evt. tælleligt mange punkter. Desuden er den kontinuert. Dermed er den en primitiv til $(f \circ g)\, g'$på $[a, b]$, så vi har

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = [(F \circ g)(x)]_a^b = [F]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

■

Den anden substitutionssætning bevises direkte ud fra integralets definition:

Sætning 209 *Antag, at g er monoton og kontinuert på $[a, b]$ med billedmængde $[c, d]$ og differentiabel med $g'(x) \neq 0$ begge dele på nær evt. i tælleligt mange punkter. Så gælder, at funktionen $x \mapsto f(g(x))\, g'(x)$ er integrabel på $[a, b]$, hvis og kun hvis f er integrabel på $[c, d]$. I bekræftende fald gælder*

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

Her tillades det, at g har $\pm\infty$ som mulige værdier. Bemærk, at formlen kan læses fra højre til venstre eller omvendt.

Øvelse 210 *Udregn følgende integraler.*

1. $\int_0^5 \frac{x^2}{4+x^3} dx$
2. $\int_\pi^{2\pi} x \cos x \, dx$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *Vink: Substituér evt. $x = \sin t$.*

Selv om de funktioner vi skal integrere meget tit er kontinuerte i hele det lukkede integrationsinterval, må man ikke forledes til at tro, at diskontinuerte funktioner ikke kan være integrable. Vi giver et meget simpelt eksempel.

Eksempel 211 *Lad f være givet ved*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & for \quad x < 0 \\ 1 & for \quad \times \geq 0 \end{cases}$$

Denne funktion er diskontinuert i 0, men vises let direkte ud fra definitionen af integrabilitet at være integrabel på intervallet $[-1, 1]$ *med integral 1. Vi kan imidlertid også benytte den fundamentale sætning. Funktionen*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & for \quad x < 0 \\ x & for \quad x \geq 0 \end{cases}$$

er nemlig en primitiv til f*, idet* F *er kontinuert overalt og differentiabel alle steder pånær i* 0*, med* $F'(x) = f(x)$ *for* $x \neq 0$*. Altså er* f *integrabel på* $[-1, 1]$ *med integral*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = F(1) - F(-1) = 1$$

Eksempel 212 *Betragt integralet* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$*. Funktionen* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *har en singularitet i 0. Ikke desto mindre er den integrabel på* $[0, 1]$*. Den har nemlig en primitiv,* $F(x) = 2\sqrt{x}$*. Vi har jo, at* $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$ *for* $x > 0$*, og at* F *er kontinuert i* $[0, 1]$*. Værdien af integralet er*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [F(x)]_0^1 = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

Eksempel 213 *Betragt integralet* $\int_0^1 \ln x\ dx$*. Integranden er singulær i 0. En stamfunktion til integranden er* $F(x) = x \ln x - x$*. Denne er ikke defineret for* $x = 0$*. Vi undersøger, om* $\lim_{x \downarrow 0} F(x)$ *eksisterer. En undersøgelse, via l'Hospitals regel på* $x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ *viser, at* $x \ln x \to 0$ *for* $x \downarrow 0$*. Derfor har vi, at* $\lim_{x \downarrow 0} F(x)$ *eksisterer og er lig med 0. Hvis vi definerer* $F(0) = 0$ *er* F *dermed en primitiv til* $\ln$ *på* $[0, 1]$*. Altså er* $\ln$ *integrabel på dette interval og*

$$\int_0^1 \ln x\ dx = F(1) - F(0) = F(1) - \lim_{x \downarrow 0} F(x) = 1$$

Eksempel 214 *Betragt integralet* $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$*. Integranden er igen singulær i 0. En stamfunktion for* $x > 0$ *er* $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$*. Da* $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \to \infty$ *for* $x \downarrow 0$ *er* $\frac{\ln x}{x}$ *ikke integrabel på* $[0, 1]$*.*

Øvelse 215 *Undersøg, om* $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ *er konvergent.*

Eksempel 216 *Betragt integralet* $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$*. En stamfunktion er* $F(x) = 2\sqrt{x}$*. Men da* $F(x) = 2\sqrt{x} \to \infty$ *for* $x \to \infty$*, er* $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *ikke integrabel på* $[1, \infty]$*.*

Eksempel 217 *Betragt integralet* $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$*. For* $p \neq 1$ *har vi stamfunktionen*

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}$$

For $p>1$ gælder, at $x^{-p+1}\to 0$ for $x\to\infty$, og for $p<1$ gælder, at $x^{-p+1}\to\infty$ for $x\to\infty$. Altså er $\frac{1}{x^p}$ integrabel på $[1,\infty]$ for $p>1$, men ikke for $p<1$. Værdien for $p>1$ er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\lim_{x\uparrow\infty}F(x)-F(1)=0-\frac{1}{-p+1}=\frac{1}{p-1}$$

Vi mangler at tage stilling til tilfældet $p=1$. Her får vi stamfunktionen $F(x)=\ln x$, der ingen grænseværdi har for $x\to\infty$. Funktionen $x\mapsto\frac{1}{x}$ er altså ikke integrabel på $[1,\infty]$.

Øvelse 218 *Undersøg tilsvarende iintegralet $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ for $p>0$. Angiv for hvilke værdier af p integralet eksisterer.*

Eksempel 219 *Betragt integralet $\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$. Integranden har en singularitet i det indre af integrationsintervallet, nemlig i 0. En stamfunktion for $x\neq 0$ er*

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

Men denne er kontinuert i hele det lukkede integrationsinterval $[-1,1]$, og er derfor en primitiv til $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ på dette interval. Derfor er $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ integrabel med integral

$$\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$$

Her så vi det første eksempel på, at en singularitet i det indre kunne ignoreres. Det må kraftigt understreges, at det skal vises, at stamfunktionen er kontinuert i den pågældende singularitet. Det næste eksempel illustrerer nødvendigheden heraf.

Eksempel 220 *Betragt integralet $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$. Der er en singularitet i 0. En stamfunktion for $x\neq 0$ er $F(x)=\ln|x|$. Denne har hverken grænseværdi fra venstre eller højre i 0, da $\ln|x|\to-\infty$ for $x\to 0$. Altså er $\frac{1}{x}$ ikke integrabel, hverken på $[-1,0]$ eller på $[0,1]$. Men så er funktionen heller ikke integrabel på $[-1,1]$. Hvis vi, uden at tænke os om, ignorerer singulariteten som i slutningen af forrige eksempel, så får vi:*

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-1}^1=\ln 1-\ln 1=0$$

hvilket selvfølgelig er rablende galt. I visse anvendelser udvider man dog integrabilitetsbegrebet, således at integralet $\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx$ virkelig får tillagt en værdi (nemlig 0). Dette gøres ved indførelse af Cauchy's hovedværdi for integralet. Denne hovedværdi er af interesse, hvis der er netop én singularitet (x_0) og denne ligger inde i intervallet. Cauchy's hovedværdi defineres da som

$$VP\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon}f(x)dx+\int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

når ellers denne grænseværdi eksisterer. VP står for Valeur Principale (på engelsk principal value: PV). For det foreliggende eksempel finder vi

$$\begin{aligned} VP\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left([\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon}+[\ln|x|]_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln\varepsilon-\ln\varepsilon)=0 \end{aligned}$$

Vi skal iøvrigt ikke beskæftige os med Cauchy's hovedværdi.

Eksempel 221 *Betragt integralet $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. En stamfunktion er $F(x)=\arctan x$, der jo både har grænseværdi for $x\to-\infty$ og for $x\to\infty$. Derfor er funktionen $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ integrabel på $[-\infty,\infty]$. Værdien er:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{x\uparrow\infty}\arctan x-\lim_{x\downarrow-\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Eksempel 222 *Betragt integralet $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$. Integranden har en singularitet i 0. En stamfunktion for $x>0$ er $F(x)=-\frac{1}{x}$. Men denne har ingen grænseværdi for $x\downarrow 0$. Altså er funktionen $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ ikke integrabel på $[0,\infty]$.*

Eksempel 223 *Betragt integralet*

$$\int_{-\infty}^{5}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}dx$$

Integranden har singulariteter i ± 2. En stamfunktion for $x\neq\pm 2$ findes ved substitutionen $t=x^2-4$, hvorved $dt=2xdx$, til

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt \\ &= \frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Denne funktion er kontinuert overalt og er således en primitiv. Men da $F(x)\to\infty$ for $x\to-\infty$ er funktionen $x\mapsto\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ ikke integrabel på $[-\infty,5]$. Derimod er funktionen åbenbart integrabel på ethvert begrænset interval.

Eksempel 224 $\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$. *Det er fristende at skrive integralet som en differens mellem de to led $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ og $\int_1^{\infty}\frac{1}{x+1}dx$. Ingen af disse to integraler eksisterer imidlertid, så den går ikke. Vi finder først en stamfunktion. For $x>0$ har vi*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx \\ &= \ln x-\ln(x+1)=\ln\frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

Denne har grænseværdien 0 *for* $x \to \infty$. *Altså har vi, at integralet* $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$ *eksisterer og har værdien*

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lim_{x \uparrow \infty} F(x) - F(1) = 0 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

5.3.1 Sammenligningssætninger

I de eksempler, vi hidtil har betragtet, har det været muligt (og nogenlunde let) at bestemme en stamfunktion. Tit er det ikke muligt, og meget ofte er det temmeligt arbejdskrævende. I sådanne tilfælde kan eksistensen af et integral ofte afgøres ved sammenligning med et andet integral *med de samme singulariteter*. Forudsætningen for succes er, at for dette andet integral kan en stamfunktion lettere bestemmes. Der gælder herom følgende særdeles nyttige sætninger, hvis beviser udelades.

Sætning 225 ***(Ulighedsversion).*** *Lad* $-\infty \leq a < b \leq \infty$. *Lad* f *og* g *være kontinuerte i* $[a, b]$ *(evt. bortset fra tælleligt mange punkter) og opfylde* $|f(x)| \leq g(x)$ *for alle* $x \in]\,[a, b]$ *(evt. bortset fra tælleligt mange punkter). Antag, at* $\int_a^b g(x)dx$ *eksisterer. Så eksisterer også* $\int_a^b f(x)dx$.

Sætning 226 ***(Grænseværdiversion).*** *Lad* $-\infty \leq a < b \leq \infty$. *Lad* f *og* g *være kontinuerte i* $[a, b]$ *(bortset fra en højst tællelig mængde punkter* K*: "De kritiske steder"). Antag, at*

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)}$$

eksisterer og er forskellig fra nul for alle $k \in K$. *Så eksisterer* $\int_a^b f(x)dx$, *hvis og kun hvis* $\int_a^b g(x)dx$ *eksisterer. Bemærk, at hvis* $a = -\infty$ *eller* $b = \infty$, *så indeholder* K *symbolerne* $-\infty$ *og* ∞, *henholdsvis.*

Bemærkning 227 *Det bør igen understreges, at når vi siger, at en grænseværdi eksisterer, så mener vi, at den eksisterer som et tal, ikke som hverken* $\pm\infty$.

Bemærkning 228 *Ved anvendelserne af sætningerne er det næsten altid en god idé at opdele integralet, så hver del kun indeholder ét kritisk sted. Derved bliver det meget lettere at bestemme et passende* g *at sammenligne med.*

Eksempel 229 *Betragt det uegentlige integral*

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx$$

hvor integranden har en singularitet i 4. *En stamfunktion er ikke så let at finde, selv om det kan lade sig gøre. Vil vi kun afgøre om integralet eksisterer, kan vi* *sammenligne integranden med* $\frac{\ln 4}{\sqrt{4-x}}$. *Vi prøver først sammenligning ved ulighed. Vi har jo åbenbart for* $x \in [1, 4[$

$$0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} \leq \frac{\ln 4}{\sqrt{4-x}}$$

Integralet $\int_1^4 \frac{\ln 4}{\sqrt{4-x}} dx = \ln 4 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$ *eksisterer, da en stamfunktion til* $\frac{1}{\sqrt{4-x}}$ *er*

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = -2\sqrt{4-x}$$

og da denne har en grænseværdi for $x \uparrow 4$. *Vi konkluderer, at* $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx$ *også eksisterer.*

Den anden sammenligningssætning er nok lidt lettere at bruge. Med $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}}$ *og* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ *har vi for* $x > 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \ln x$$

der har grænseværdien $\ln 4$ *for* $x \to 4$. *Denne grænseværdi er forskellig fra nul, og som vist i første omgang eksisterer* $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$. *Altså eksisterer også* $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx$.

Ifølge Maple gælder, at

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx = -4\sqrt{3} + 8\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \cong 3.6075$$

Eksempel 230 *Betragt integralet*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx$$

der kun afviger fra eksemplet ovenfor ved at have andre grænser. Integranden har en singularitet i 0. *Vi vil afgøre, om integralet eksisterer ved at sammenligne integranden* $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}}$ *med* $g(x) = \ln x$. *Vi har for* $x \in]0, 1]$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{4-x}$$

der har grænseværdien 2 *for* $x \to 0$. *Logaritmefunktionen* $\ln$ *er tidligere vist at være integrabel på* $[0, 1]$. *Vi konkluderer (da åbenbart* $2 \neq 0$*), at også* $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}}$ *er integrabel på* $[0, 1]$.

Da ifølge det foregående eksempel også $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx$ *eksisterer, eksisterer integralet*

$$\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}} dx$$

altså også. Ifølge Maple er værdien $-8 + 16\ln 2$.

Eksempel 231 *Betragt integralet*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

der har de to kritiske steder 0 *og* ∞. *En stamfunktion er ikke til at finde, med mindre man er bekendt med de såkaldte Fresnel-integraler. Vi opdeler i* $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$. *Betragt først* $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$. *Vi sammenlignier integranden* $f(x) = \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}$ *med* $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. *Vi finder for* $x > 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x}$$

der har grænseværdien 1 *for* $x \to 0$. *Da integralet* $\int_0^\pi g(x)\, dx = \int_0^\pi \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ *eksisterer, gør* $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ *det også.*
Betragt nu $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$. *Da*

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

og da $\int_\pi^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ *eksisterer, gør* $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ *det også. Bemærk, at vi her ikke kunne bruge grænseværdiversionen af sammenligningssætningen.*
Da både $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ *og* $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ *eksisterer, eksisterer også det oprindelige integral* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$. *Ifølge Maple er værdien* $\sqrt{2\pi}$.

Eksempel 232 *Betragt integralet*

$$\int_{-\infty}^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 - 16}} dx$$

Dets kritiske steder er ± 2 *og* $-\infty$. *En stamfunktion til* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-16}}$ *kan ikke udtrykkes ved elementære funktioner. Vi opdeler integralet:*

$$\int_{-\infty}^5 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-3} f(x)\, dx + \int_{-3}^0 f(x)\, dx + \int_0^5 f(x)\, dx$$

I det første integral sammenligner vi $f(x)$ *med* $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = x^{-\frac{4}{3}}$. *Vi finder*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4 - 16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 16x^{-4}}} \to 1$$

for $x \to -\infty$. *Men* $\int_{-\infty}^{-3} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-3} x^{-\frac{4}{3}} dx$ *eksisterer, derfor eksisterer også* $\int_{-\infty}^{-3} f(x)\, dx$.

I det andet integral sammenligner vi $f(x)$ *med* $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$. *Vi finder*

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x^4-16}} = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x+2)(x^2+4)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)(x^2+4)}} \to -\frac{1}{\sqrt[3]{32}} \end{aligned}$$

for $x \to -2$. *Men* $\int_{-3}^{0} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} dx$ *eksisterer, derfor eksisterer også* $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$.

I det sidste integral sammenlignes $f(x)$ *med* $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$. *Regningerne er ganske analoge, og konklusionen den samme. Alt i alt konkluderer vi, at*

$$\int_{-\infty}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-16}} dx$$

eksisterer. Værdien kan nu bestemmes numerisk med en vilkårlig ønsket nøjagtighed. Med 10 betydende cifre fås iflg. Maple 1.441462966.

5.3.2 Diskontinuert stamfunktion

Undertiden sker det, at den stamfunktion, som man har fundet, ikke er kontinuert i $[a, b]$, men dog stykkevist kontinuert, d.v.s. at de eneste diskontinuiteter er springdiskontinuiteter med endelige spring. I så fald kan man udfra stamfunktionen bestemme en primitiv, altså eksisterer integralet også i sådanne tilfælde. Vi giver et eksempel, der viser, at selv for integraler uden singulariteter skal man passe på, at man har virkelig har en primitiv, altså en kontinuert funktion, der stykkevist er stamfunktion i integrationsintervallet.

Eksempel 233 *Vi vil beregne integralet*

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}}$$

Integranden $\frac{1}{\cos x - \frac{5}{3}}$ *har ikke singulariteter noget sted, idet jo*

$$\cos x - \frac{5}{3} \leq 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

for alle $x \in R$. *En stamfunktion kan bestemmes ved substitutionen* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. *Herved fås* $dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right) dx$. *Altså* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. *Videre har vi*

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1+t^2} - 1 \end{aligned}$$

Dermed finder vi

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{2}{1+t^2} - 1 - \frac{5}{3}\right)} \\ &= \int \frac{2dt}{-\frac{2}{3} - \frac{8}{3}t^2} = -3\int \frac{dt}{1+4t^2} \\ &= -\frac{3}{2}\arctan 2t = -\frac{3}{2}\arctan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Denne er dog kun stamfunktion på hvert af intervallerne $[0,\pi[$ *og* $]\pi, 2\pi]$, *idet den ikke engang er defineret i* π. *Hvad værre er, den har ikke samme grænseværdi fra højre og venstre i* π, *så vi kan ikke engang gøre den kontinuert (og dermed heller ikke differentiabel) ved blot at definere dens værdi i* π. *Men vi finder, at*

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow\pi} F(x) &= -\frac{3\pi}{4} \\ \lim_{x\downarrow\pi} F(x) &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Så funktionen

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & for \quad x < \pi \\ -\frac{3\pi}{4} & for \quad x = \pi \\ F(x) - \frac{3\pi}{2} & for \quad x > \pi \end{cases}$$

er kontinuert på hele intervallet $[0, 2\pi]$. *Da den ligesom* F *er stamfunktion på hvert af intervallerne* $[0,\pi[$ *og* $]\pi, 2\pi]$, *og da den kontinuerte funktion* f *jo har en stamfunktion på hele intervallet* $[0, 2\pi]$, *må* F_1 *også være en stamfunktion på* $[0, 2\pi]$. *Integralet findes derfor til*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}} &= \left[F_1(x)\right]_0^{2\pi} = F_1(2\pi) - F_1(0) \\ &= -\frac{3}{2}\arctan\left(2\tan(\pi)\right) - \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{3}{2}\arctan\left(2\tan\left(\frac{0}{2}\right)\right)\right) \\ &= 0 - \frac{3\pi}{2} + 0 = -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Integralet udregnes lettere ved brug af indskudssætningen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}}$$

På hvert af disse integraler kan stamfunktionen F *benyttes:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}} = \left[F(x)\right]_0^{\pi} + \left[F(x)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

Vi må blot tolke $F(\pi)$ *som* $\lim_{x\uparrow\pi} F(x)$ *i første led og som* $\lim_{x\downarrow\pi} F(x)$ *i andet led. Hermed fås*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - \frac{5}{3}} = \left(-\frac{3\pi}{4} - 0\right) + \left(0 - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2}$$

Øvelse 234 *Find integralet*

$$\int_0^{\pi} \frac{2dx}{1+3\sin^2 x}$$

idet det oplyses, at $F(x) = \arctan(2\tan x)$ *er stamfunktion på hvert af intervallerne* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *og* $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$*.*

5.4 Numerisk integration

Ofte udregnes bestemte integraler jo ved, at en stamfunktion (eller en primitiv) til integranden bestemmes, hvorefter øvre og nedre grænse indsættes og de to resultater trækkes fra hinanden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Man kommer imidlertid tit ud for integraler, hvor stamfunktionsbestemmelsen er umulig, ikke fordi en stamfunktion ikke eksisterer, men fordi den ikke kan udtrykkes ved hjælp af det repertoire af funktioner, vi har til rådighed. Det kan eksempelvis vises, at det ubestemte integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

ikke kan udtrykkes ved brug af endeligt mange af symbolerne $x, +, -, *, /, \sqrt[n]{}, \sin, \cos, \exp, \ln$ samt de naturlige tal. Skal vi altså bestemme eksempelvis $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$ nytter det ikke meget at sige, at da funktionen $x \longmapsto \frac{e^{-x}}{x}$ er kontinuert på intervallet $[1, 2]$, så har den også en stamfunktion F på det interval, og integralet er blot $F(2) - F(1)$. Vi kan jo ikke angive nogen formel for F, ihvertfald ikke en, der kun bruger de ovenanførte symboler.

I sådanne tilfælde kan man gribe til numerisk integration. Der er her mange metoder. Mange af disse er "blot" mere eller mindre effektive varianter af definitionen af det bestemte integral som en grænseværdi for Riemannsummer. Vi skal her betragte 3 forskellige metoder: Midtpunktsmetoden, trapezmetoden og Simpsons metode. Den sidste er generelt den bedste af de tre.

Disse metoder gennemgås her primært for at give en forståelse af, hvad en numerisk integrationsmetode er. Har man uden for dette kursus et bestemt integral, som man ønsker udregnet numerisk, bør man bruge et godt computerprogram, som f.eks. Maple. For et integral som det ovennævnte er en god lommeregner også udmærket.

5.4.1 Midtpunktsmetoden

Vil vi udregne integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ kan vi approksimere ved en Riemannsum

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

hvor $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, og hvor t_i tages i midten af intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, altså $t_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Desuden lader vi inddelingen være ækvidistant, d.v.s. at alle delintervallerne $[x_{i-1}, x_i]$ er lige lange. Længden af det enkelte delinterval kalder vi h, altså $h = \frac{b-a}{n}$. Hermed er $x_i = a + ih$, og $t_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h$. Vi approksimerer alltså integralet ved

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, h$$

Vi må forvente, at approksimationen bliver desto bedre jo større n er, altså jo mindre h er. Det er da også rigtigt, idet det kan vises, at

$$\int_a^b f(x)\, dx - M_n = \frac{b-a}{24} f''(\xi)\, h^2$$

for et eller andet $\xi \in]a, b[$. Da eksponenten til h ovenfor er 2, kaldes metoden for en andenordens metode.

Bruger man højre endepunkt i stedet for midtpunktet i hvert delinterval, får man højre-endepunktsmetoden. Tilsvarende defineres venstre-endepunktsmetoden.

5.4.2 Trapezmetoden

Vi vil igen finde en approksimation til integralet $\int_a^b f(x)\, dx$, og bruger atter en ækvidistant inddeling. Ved trapez-approksimationen T_n forstås gennemsnittet af resultaterne af højre- og venstre-endepunktsmetoderne. Når $f(x) \geq 0$ kan T_n kan også beskrives som det samlede areal af en række trapezer, deraf navnet. Formlen lyder

$$T_n = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Her er længden af det enkelte delinterval h, altså $h = \frac{b-a}{n}$. Vi må forvente, at approksimationen bliver desto bedre jo mindre h er. Det er da også rigtigt, idet det kan vises, at

$$\int_a^b f(x)\, dx - T_n = -\frac{b-a}{12} f''(\xi)\, h^2$$

for et eller andet $\xi \in]a, b[$. Da eksponenten til h ovenfor er 2, kaldes metoden for en andenordens metode.

Bemærkning 235 *Da den fejl, der begås ved at acceptere M_n eller T_n som erstatning for $\int_a^b f(x)\, dx$, i begge tilfælde er lig med $kf''(\xi)\, h^2$, hvor k er en konstant, er begge metoder eksakte på førstegradspolynomier.*

5.4.3 Midtpunktsmetoden og trapezmetoden i Maple

Beregningerne foregår ved hjælp af kommandoerne middlesum og trapezoid, der begge (sammen med rightsum og leftsum) ligger i studentpakken. I studentpakken ligger også illustrationskommandoerne middlebox, rightbox og leftbox.

Der er ingen ”trapezbox”. Den er meget nem at lave udfra (f.eks.) middlebox. Det har jeg gjort, og jeg har anbragt proceduren på kursushjemmesiden under Noter. Her viser vi brugen af kommandoerne på integralet $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}dx$..

f:= x − > exp(-x)/x;

with(student);

middlebox(f(x), x=1..2, 4); # Sidste argument er antal delintervaller n

middlesum(f(x), x=1..2, 4); #Giver en ”træg” sum, bemærk det sorte summetegn

value(%);

evalf(%);

Kommandoerne rightsum, leftsum og trapezoid virker ganske som middlesum. Kommandoerne rightbox, leftbox og trapezbox (fra hjemmesiden) virker ganske som middlebox.

5.4.4 Simpsons metode

Vi vil finde en approksimation til integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, og bruger en ækvidistant inddeling $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. At inddelingen er ækvidistant betyder som nævnt, at afstanden mellem to på hinanden følgende x_i'er er konstant og derfor lig med $h = \frac{b-a}{n}$. Metoden nødvendiggør, at n tages som et *lige* positivt helt tal.

Idéen i metoden er, at approksimere integranden ved en Tuborg-funktion bestående af polynomier af højst anden grad: På intervallet $[x_0, x_2]$ bestemmes et polynomium p af højst anden grad, der har samme funktionsværdier som f i de 3 punkter x_0, x_1 og x_2. Dette polynomium bruges så som erstatning for f på $[x_0, x_2]$. På samme måde findes et (andet) polynomium af højst anden grad, der har samme funktionsværdier som f i de 3 punkter x_2, x_3 og x_4. Dette polynomium bruges så som erstatning for f på $[x_2, x_4]$. Således fortsættes til man tilsidst har bestemt et polynomium af højst anden grad, der har samme funktionsværdier som f i de 3 punkter x_{n-2}, x_{n-1} og x_n. Dette polynomium bruges så som erstatning for f på $[x_{n-2}, x_n]$. Man ser, hvorfor n skal være lige.

Den ovenfor bestemte Tuborg-funktion integreres derefter på $[a, b]$. Ud af en sådan beregning kommer Simpsons formel, som vi nu skal udlede.

Det er nok at betragte intervallet $[x_0, x_2]$, idet de fundne formler uden videre kan bruges på de andre intervaller. Vi har, at $x_0 = a, x_1 = a + h$ og $x_2 = a + 2h$. Ved at parallelforskyde grafen for f langs x-aksen kan vi - uden at ændre på integralets værdi - opnå, at $x_0 = -h, x_1 = 0$ og $x_2 = h$. Det gør beregningerne meget simplere.

Vi skal nu bestemme polynomiet $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, så

$$\begin{aligned} p(-h) &= f(-h) \\ p(0) &= f(0) \\ p(h) &= f(h) \end{aligned}$$

Med betegnelserne $y_{-1} = f(-h), y_0 = f(0)$ og $y_1 = f(h)$, skal vi altså bestemme koefficienterne A, B og C, så

$$\begin{aligned} A(-h)^2 + B(-h) + C &= y_{-1} \\ A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C &= y_0 \\ Ah^2 + Bh + C &= y_1 \end{aligned}$$

d.v.s. at $C = y_0$ og

$$\begin{aligned} Ah^2 - Bh &= y_{-1} - y_0 \\ Ah^2 + Bh &= y_1 - y_0 \end{aligned}$$

Ved addition af de to ligninger fås

$$2Ah^2 = y_{-1} - 2y_0 + y_1$$

hvormed A er bestemt. B bestemmes også let, men det skal vise sig, at vi ingen brug har for B. Udregner vi nemlig integralet, ser vi, at B ikke indgår i resultatet:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} p(x)\,dx &= \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx\right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch \end{aligned}$$

Med de fundne værdier for A og C fås

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} p(x)\,dx &= \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch = \frac{h}{3}\left(2Ah^2\right) + 2Ch \\ &= \frac{h}{3}(y_{-1} - 2y_0 + y_1) + 2y_0 h \\ &= \frac{h}{3}(y_{-1} + 4y_0 + y_1) \\ &= \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h)) \end{aligned}$$

Hermed bliver Simpsons approksimation S_n til integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ som følger

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{h}{3}(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

der kan omskrives til

$$S_n == \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Det kan vises, at

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_n = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)\,h^4$$

for et eller andet $\xi \in \,]a,b[$. Da eksponenten til h ovenfor er 4, kaldes metoden for en fjerdeordens metode.

Bemærkning 236 *Da den fejl, der begås ved at acceptere S_n som erstatning for $\int_a^b f(x)\,dx$ er lig med $-\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)\,h^4$, er Simpsons metode eksakt på tredjegradspolynomier, hvilket er overraskende, da f blev approksimeret ved en Tuborgfunktion af polynomier af højst anden grad.*

Eksempel 237 *Vi vil finde en numerisk approksimation til integralet $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$. Værdien af dette integral er $\ln 2$, der med 10 betydende cifre er 0.6931471806. Vi prøver Simpsons metode med $n=2$ og $n=4$. Integranden er $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi finder, når $n=2$*

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{36} \cong 0.6944 \end{aligned}$$

og når $n=4$

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left(f(1) + 4f\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + 4f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2)\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{16}{5} + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1747}{2520} \cong 0.6933 \end{aligned}$$

Allerede nu synes det ikke urimeligt at påstå, at integralets værdi med 3 beydende cifre er 0.693. Regner man videre finder man for $n=8$, at $S_8 = 0.6931545307$ og for $n=16$, at $S_{16} = 0.6931476527$. I det sidste resultat er den faktiske fejl

$$\ln 2 - S_{16} = 0.6931471806 - 0.6931476527 = -4.721 \times 10^{-7}$$

Det er sjældent, at man bruger det teoretiske udtryk $-\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)\,h^4$ til en vurdering af fejlen. Det er for det første tit besværligt at vurdere på den 4. afledede, og for det andet bliver vurderingen ofte altfor pessimistisk. I det foreliggende tilfælde finder vi, da $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$, at

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx - S_n = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)\,h^4 = -\frac{2}{15}\frac{1}{\xi^5}h^4$$

hvor $\xi \in [1,2]$. Heraf fås, da det værst tænkelige ξ er $\xi = 1$, at

$$\left|\int_1^2 \frac{1}{x}dx - S_n\right| = \frac{2}{15}\frac{1}{\xi^5}h^4 \le \frac{2}{15}h^4$$

For $n = 16$ er $h = \frac{1}{16}$, så vores vurdering bliver

$$\left|\int_1^2 \frac{1}{x}dx - S_{16}\right| \leq \frac{2}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^4 \cong 2.034\,5 \times 10^{-6}$$

Denne øvre grænse for fejlen er altså ca. 4 gange så stor som den faktiske fejl. Betragtes i stedet integralet $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}dx$, der også har værdien $\ln 2$, og udføres de samme regninger, finder man (igen med $n = 16$), at den vurderede øvre grænse for fejlen ved S_{16} er ca. 70 gange større end den faktiske fejl.

Simpsons metode i Maple

Beregningerne foregår ved hjælp af kommandoen simpson, der ligger i student-pakken. Vi afprøver kommandoen på $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}dx$.

f:= x − > exp(-x)/x;
with(student);
simpson(f(x), x=1..2, 4); #Giver en "træg" sum, bemærk det sorte summetegn
value(%);
evalf(%);

Det sidste output er 0.1705889082. Den eksakte værdi kan Maple udtrykke ved brug af en funktion Ei, der kaldes eksponentialintegralet. Beder man derefter om en decimalbrøkstilnærmelse til denne eksakte værdi (ved hjælp af evalf), får man 0.1704834237. Prøver man med fordoblinger af n, fås $S_8 = 0.1704906920$, $S_{16} = 0.1704838908$ og $S_{32} = 0.1704834532$. Går man videre, bør man nok bede Maple om at regne med flere betydende cifre end som hér 10.

Bemærkning 238 *Maple kan finde en stamfunktion til $\frac{e^{-x}}{x}$, men kigger man i hjælpen til eksponentialintegralet* Ei *(eller kigger man i en matematisk formelsamling, som f.eks. Schaum), så finder man ud af, at* Ei *selv er defineret ved et integral, der minder en hel del om det givne.*

Situationen er noget nær følgende. Vi kan ikke bestemme en stamfunktion til den kontinuerte funktion f. Ikke desto mindre har den jo en sådan. Faktisk er

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

en stamfunktion til f uanset værdien af konstanten a (sålænge f er kontinuert på det interval, der integreres over). Lad os sige, at vi tit får brug for F. Så giver vi den et velklingende navn og studerer den: Finder egenskaber ved den, tabellægger den (f.eks. v.hj.a. Simpsons metode). Når så F er optaget i det gode selskab sammen med $\sin, \cos, \ln, \exp, \mathrm{Ei}$ o.s.v. kan vi med god ret sige at vi kender en stamfunktion til f. Et eksempel er det såkaldte sinusintegral. Denne funktion defineres ved

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

for alle $x \in R$.

5.4.5 Numerisk udregning af integral med singularitet eller med $\pm\infty$ som grænser

Når der i afsnittet om numerisk integration blev anført, at fejlen ved midtpunktsmetoden, trapezmetoden og Simpsons metode var henholdsvis (med $h = \frac{b-a}{n}$)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx - M_n &= -\frac{b-a}{24} f''(\xi)\,h^2 \\ \int_a^b f(x)\,dx - T_n &= \frac{b-a}{12} f''(\xi)\,h^2 \\ \int_a^b f(x)\,dx - S_n &= -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)\,h^4\end{aligned}$$

så var forudsætningen for det første, at integrationsintervallet $[a, b]$ var begrænset.Desuden er det for de første to metoders vedkommende under forudsætning af, at f er én gang differentiabel og f' kontinuert på det lukkede interval $[a, b]$, og at f'' eksisterer på $]a, b[$. For Simpsons metodes vedkommende behøves det, at f er tre gange differentiabel og f''' kontinuert på det lukkede interval $[a, b]$, og at $f^{(4)}$ eksisterer på $]a, b[$. For integraler med singulariteter eller over et ubegrænset integrationsinterval gælder disse forudsætninger ikke allesammen. Når $[a, b]$ er begrænset forhindrer dette dog ikke, at vi stadig har, at M_n, T_n og $S_n \to \int_a^b f(x)\,dx$ for $n \to \infty$, men vi har blot ikke styr på fejlen. Den relative fejl kan være betydeligt større end den er for integraler, der opfylder de nævnte forudsætninger.

Eksempel 239 *Betragt integralerne $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ og $\int_0^1 \pi \sin(\pi x)\,dx$. Begge har værdi 2. De faktiske fejl ved midtpunktsmetoden er for $n = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ for første integral heholdsvis*

$$0.151, 0.107, 0.0756, 0.0535, 0.0378, 0.0267, 0.0189$$

For det andet integral er de tilsvarende fejl

$$-0.00322, -.000803, -2.01\times10^{-4}, -5.02\times10^{-5}, -1.26\times10^{-5}, -3.14\times10^{-6}, -0.784\times10^{-6}$$

Trapezmetoden og Simpsons metode er slet ikke egnede til integralet $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ idet begge metoder bruger intervalendepunkterne.

Man kan imidlertid ved substitution slippe af med en singularitet eller ændre et ubegrænset integrationsinterval til et begrænset. Vi giver et par eksempler.

Eksempel 240 *Betragt integralet*

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

som vi tidligere (ved sammenligning) har vist eksisterer. Substitutionen $x = t^2, t \geq 0$, *fører til*

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\left(t^2\right)}{t^2} dt$$

Integralet på højre side har ingen singularitet, idet

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(t^2\right)}{t^2} = 1$$

Sættes $f(t) = \frac{\sin\left(t^2\right)}{t^2}$ *for* $t \neq 0$ *og* $f(0) = 1$ *er* f *dermed kontinuert i hele* $\mathbb{R}$. *Faktisk er* f *endog vilkårligt ofte differentiabel i* $\mathbb{R}$. *Simpsons metode bør derfor kunne anvendes på* $2\int_0^{\sqrt{\pi}} f(t)\, dt$ *med godt resultat. Med* $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ *fås*

$$2.718510112, 2.657210755, 2.651758258, 2.651486143, 2.651470293, 2.651469318$$

Det eksakte resultat er ifølge Maple $2\sqrt{2\pi} FresnelC\left(\sqrt{2}\right)$, *der med 10 betydende cifre er* 2.651469254. *Simpsons metode med* $n = 64$ *gav altså en faktisk fejl på* -6.4×10^{-8}.

Eksempel 241 *Integralet*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

kan ved et snildt trick udregnes til $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *Vi vil ved en substitution omskrive integralet til et integral over et begrænset interval. Vi benytter substitutionen* $t = \arctan x$, *altså* $x = \tan t$, *hvorved* $dx = \left(1 + \tan^2 t\right) dt$, *så vi har*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tan^2 t}\left(1 + \tan^2 t\right) dt$$

Vi har ikke fået et simplere udseende integral, men integrationsintervallet er begrænset, og bemærk, at da $e^{-x^2}\left(1 + x^2\right) \to 0$ *for* $x \to \infty$, *har vi, at* $e^{-\tan^2 t}\left(1 + \tan^2 t\right) \to 0$ *for* $t \uparrow \frac{\pi}{2}$. *Altså har integranden ingen singularitet i intervallet* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Det kan vises, at hvis integrandens værdi sættes til* 0 *for* $t = \frac{\pi}{2}$, *så er integranden vilkårligt ofte differentiabel i* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Simpsons metode med* $n = 8, 16, 32, 64$ *giver (idet regningerne udføres i Maple med* 12 *betydende cifre):*

$$0.887796992932, 0.886294693068, 0.886226751744, 0.886226925493$$

medens $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cong 0.886226925455$. *Simpsons metode med* $n = 64$ *gav altså en faktisk fejl på* -3.8×10^{-11}.

Kapitel 6

Eksempler på Anvendelser af Differentialligninger

Dette kapitel indeholder kun en række eksempler på differentialligninger. Der er ingen løsninger. Enkelte er dog brugt som eksempler i de følgende kapitler. De øvrige kan bruges som opgaver.

Eksempel 242 ***Eksponentiel vækst.*** *Vækst af en population, bakterier eksempelvis. Lad $y(t)$ betegne antallet af bakterier i en bakteriekultur til tiden t. En simpel model siger, at tilvæksten i antal bakterier pr. tidsenhed til tiden t er proportional med det antal man har til tiden t, altså*

$$y'(t) = ky(t)$$

hvor k er en positiv konstant.

Eksempel 243 ***Logistisk vækst.*** *Vækst af en population, bakterier eksempelvis. Lad $y(t)$ betegne antallet af bakterier i en bakteriekultur til tiden t. En lidt forbedret model siger, at tilvæksten i antal bakterier pr. tidsenhed til tiden t er givet ved*

$$y'(t) = ky(t)(L - y(t))$$

hvor k og L er positive konstanter. Modellen forsøger at tage hensyn til, at en kultur under visse forhold kun tillader, at en vis mængde L af bakterier overlever. Bemærk, at $y'(t) < 0$ for $y(t) > L$. Når $y(t)$ er betydeligt mindre end L er væksten næsten som for den simple model ovenfor. Kilde: J.D. Murray, Mathematical Biology, Springer 1989, pp. 1- 4.

Eksempel 244 ***En simpel autokatalytisk kemisk reaktion.*** *Vi betragter reaktionen*

$$A + R \to R + R$$

1. *Første tænkes reaktionen at foregå i en omrørt tank uden gennemstrømning. Idet* $a(t)$ *og* $r(t)$ *betegner koncentrationerne (i mol/volumenenhed), har vi*

$$\frac{da}{dt} = -kar$$

hvor k *er en positiv konstant (hvis temperaturen holdes konstant). Det samlede antal mol* A *og* R *er åbenbart konstant under processen. Altså har vi, at* $a(t) + r(t) = c$*, hvor* c *er en positiv konstant. Dermed kan differentialligningen skrives*

$$\frac{da}{dt} = -ka(c-a)$$

2. *Dernæst tænkes reaktionen at foregå i en omrørt tank med gennemstrømning. Tanken har rumfang* V *og gennemstrøningen foregår med volumenhastighed* F*. Det indkommende indeholder* A *og* R *i koncentrationer på* a_1 *og* r_1*, henholdsvis. Så gælder*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Va) &= Fa_1 - Fa - Vkar \\ \frac{d}{dt}(Vr) &= Fr_1 - Fr + Vkar \end{aligned}$$

Kilde: O. Levenspiel, Chemical Reaction Engineering, John Wiley, 2nd ed., pp.56 og 153.

Eksempel 245 ***Radioaktivt henfald****. Antag at stoffet* A *er radioaktiv og henfalder til stoffet* B*, der igen er radioaktiv og henfalder til stoffet* C*, som er stabilt:*

$$A \to B \to C$$

Lad $a(t), b(t)$ *og* $c(t)$ *betegne antallet af atomer af stofferne* A, B *og* C *til tiden* t*, henholdsvis. Idet vi starter med rent* A *til tiden 0, gælder følgende differentialligninger*

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -k_1 a \\ \frac{db}{dt} &= k_1 a - k_2 b \\ \frac{dc}{dt} &= k_2 b \end{aligned}$$

med begyndelsesbetingelserne $a(0) = a_0$*,* $b(0) = 0$ *og* $c(0) = 0$*. Her er* k_1 *og* k_2 *henfaldskonstanterne for stofferne* A *og* B*. Opgaven består i at bestemme* $a(t), b(t)$ *og* $c(t)$ *for* $t \geq 0$*. I stedet for at tænke på radioaktivt henfald kunne vi lade skemaet repræsentere to irreversible førsteordens kemiske reaktioner.*

Eksempel 246 ***Elementær reversibel reaktion****. I en omrørt og lukket tank foregår reaktionen*

$$A + B \rightleftarrows R + S$$

Idet $a(t), b(t), r(t)$ *og* $s(t)$ *betegner koncentrationerne (i mol/volumenenhed) af* A, B, R *og* S *henholdsvis, har vi*

$$\frac{da}{dt} = -k_1 ab + k_2 rs$$

hvor k_1 *og* k_2 *er positive konstanter (hvis temperaturen holdes konstant). Vi udnytter nu, at forskellen mellem antal mol af* A *og* B *er konstant, altså har vi, at* $a(t) - b(t) = c_1$ *. Det samme gælder for* R *og* S*, men vi vil hellere udnytte, at summen af antal mol af* A *og* R *og summen af antal mol af* A *og* S *begge er konstante, altså* $a(t) + r(t) = c_2$ *og* $a(t) + s(t) = c_3$*. Dermed kan* b, r *og* s *elimineres fra den oprindelige differentialligning, og vi finder*

$$\frac{da}{dt} = -k_1 a(a - c_1) + k_2 (c_2 - a)(c_3 - a)$$

Åbenbart er c_2 *og* c_3 *positive konstanter, mens konstanten* c_1 *udmærket kan være negativ. Kilde: O. Levenspiel, Chemical Reaction Engineering, John Wiley, 2nd ed., p.10.*

Eksempel 247 ***Larvemodel.*** *En model for væksten af en vis larve i New Brunswick's skove (Spruce Budworm, Forest Lepidoptera) er som følger, idet* $u(t)$ *er et mål for antal larver pr. arealenhed til tiden* t*:*

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}$$

Her er r *og* q *positive konstanter. Kilde: J.D. Murray, Mathematical Biology, Springer 1989, pp. 4-8.*

Eksempel 248 ***Biologisk spildevandsrensning****. I en omrørt tank med gennemstrømning befinder sig en type mikroorganismer,* X*, og et næringssubstrat* S*. Tanken har rumfang* V *og gennemstrøningen foregår med volumenhastighed* F*. Det indkommende indeholder* X *og* S *i koncentrationer på* x_1 *og* s_1*, henholdsvis. Så gælder i en enkel model*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Vx) &= Fx_1 - Fx + V\left(\frac{\mu_1 xs}{K + s} - kx\right) \\ \frac{d}{dt}(Vs) &= Fs_1 - Fs - V\frac{\mu_2 xs}{K + s} \end{aligned}$$

Kilde: Metcalf & Eddy, Wastewater Engineering, McGraw-Hill, 1979, p. 419.

Eksempel 249 ***Fordeling af organisk materiale i en flod.*** *Vi betragter en flod, der befinder sig i en stationær tilstand. Koncentrationen af organisk materiale i afstanden* x *fra et givet sted ved floden betegnes med* $c(x)$*. Denne størrelse antages altså udelukkende at afhænge af* x*. I en model for denne stationære strømning gælder*

$$E\frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{dc}{dx}\right) - F\frac{dc}{dx} - kA(x)c = 0$$

hvor $A(x)$ betegner flodens tværsnitsareal på stedet x, F er volumenhastigheden. E og k er positive konstanter. Kilde: A. James (Editor), Mathematical Models in Water Pollution Control, John Wiley, 1978, pp.44-50.

Eksempel 250 ***Det matematiske pendul.*** *En partikel med masse m er ophængt i en stiv masseløs stang af længde l. Pariklen svinger frem og tilbage som et pendul. Partiklen bevæger sig i en orienteret lodret plan. Vinklen fra lodlinien (regnet med fortegn) til tiden t betegnes med $\theta(t)$. Tyngdeaccelerationen betegnes som sædvanligt med g. Idet der ikke er luftmodstand og ej heller gnidning i omdrejningspunktet, gælder ifølge Newtons 2.lov*

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

Eksempel 251 ***Medicins effekt i en organisme.*** *Det antages, at en medicin X forårsager en effekt af størrelse $z(t)$ til tiden t, og at vi har*

$$\frac{dz}{dt} = Ax - az$$

hvor $x(t)$ betegner medicinkoncentrationen til tiden t. A og a er positive konstanter. Det antages, at X forbrændes enzymatisk. Heraf følger, at en rimelig model for denne forbrænding er

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{bx}{1+\frac{x}{K}}$$

hvor b og K er positive konstanter. Kilde: N. Rashevsky (Editor), Physicomathematical Aspects of Biology, Academic Press, 1962, p. 323.

Eksempel 252 ***Bøjning af bjælker.*** *En bjælke er placeret vandret og understøttet i enderne. Bjælken udsættes for en vandret kraft fra hver ende af størrelsen P. Desuden er den under påvirkning af en last fordelt langs bjælken og af intensitet $q(x)$, hvor x er afstanden fra bjælkens ene ende. Bjælken afviger fra vandret i positionen x med størrelsen $y(x)$. Denne størrelse opfylder differentialligningen*

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = q(x)$$

hvor EI er en positiv konstant, der er et mål for stivheden af bjælken m.h.t den plan som, bjælken bøjer i. Bjælken antages at være symmetrisk m.h.t. denne plan. Kilde: S.P. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961, p.2.

Eksempel 253 ***Et hængende elastisk kabel.*** *Givet et kabel med konstant tværsnitsareal og af homogent materiale. Det er ophængt i enderne, og disse er i samme højde. Et koordinatsystem er indlagt, så x-aksen er parallel med forbindelseslinien mellem de to ophængspunkter og y-aksen er lodret med den* *positive ende opad. Kabeltrækket T i punktet $(x, y(x))$ og $y(x)$ kan vises at opfylde*

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{T}{\lambda}\right)\frac{dT}{dx} &= w_0\sqrt{\frac{T^2}{H^2}-1} \\ \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{T^2}{H^2}-1}\end{aligned}$$

hvor H er den horisontale trækkraft i kablet (som er konstant), og hvor λ er et mål for kablets elasticitet: Jo større λ, desto sejgere er kablet. w_0 er densiteten (masse/rumfang) før strækning. Kilde: W.D.MacMillan, Statics and the Dynamics of a Particle, Dover, 1958, p.168.

Eksempel 254 ***Elekrisk kredsløb.*** *Betragt et elektrisk kredsløb bestående af en modstand på R , en spole med selvinduktion L og en kondensator med kapacitet C. Kredsen påtrykkes en spænding på $E(t)$. Så gælder, når $I(t)$ er strømstyrken til tiden t*

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt}$$

Kapitel 7

Differentialligninger af 1. orden

7.1 Eksistens og entydighed

Lad D være en åben delmængde af R^2. I mængden D betragtes differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad (*)$$

også ofte skrevet $y' = f(t, y)$ eller sjældnere $y'(t) = f(t, y(t))$. Her er f en reel funktion af 2 variable defineret i mængden D.

Eksempel 255 *Hvis differentialligningen er*

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2$$

så er $f(t, y) = t^2 + y^2$.

Definition 256 *Ved en løsning til differentialligningen (*) forstås en differentiabel funktion* ϕ *defineret på et* interval I*, så*

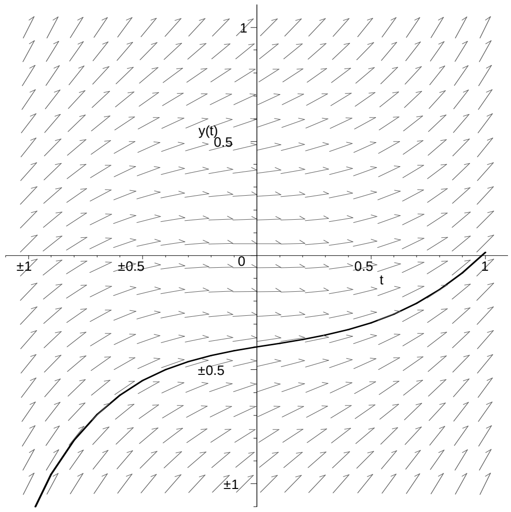
$$\phi'(t) = f(t, \phi(t))$$

for alle $t \in I$.

Husk på, at $\phi'(t)$ er hældningen for tangenten til grafen for ϕ i punktet $(t, \phi(t))$. Udsagnet $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ siger derfor, at hældningen for tangenten til løsningen kan beregnes udfra kendskab til den øjeblikkelige position $(t, \phi(t))$. At have givet en differentialligning $\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y)$ i et område $D \subseteq R^2$ er altså at have givet et *hældningsfelt*:

Definition 257 *Hvis der i ethvert punkt* $(t, y) \in D$ *er givet en hældning* $f(t, y)$ *siger man, at der i* D *foreligger et hældningsfelt (i nogle sammenhænge også kaldet et retningsfelt).*

At have givet en differentialligning af første orden er altså at have givet et hældningsfelt. Løsning af differentialligningen $y' = f(t, y)$ består nu i bestemmelse af kurver, der i ethvert punkt (t, y) har den rigtige hældning $f(t, y)$.



Hældningsfeltet for $y' = t^2 + y^2$ med den løsning, der opfylder $y(0) = -0.4$

Definition 258 *En løsning* ϕ *med definitionsinterval* I *kaldes* maksimal*, hvis der ikke findes nogen løsning* ψ *med definitionsinterval* $J \supset I, J \neq I$*, så* $\psi(t) = \phi(t)$ *for alle* $t \in I$*.*

For en maksimal løsning kan definitionsintervallet altså ikke udvides. Det kan vises (men det er vel nærmest indlysende), at enhver løsning kan udvides til en maksimal løsning.Vi skal i det følgende med ordet løsning normalt mene maksimal løsning. Kun når det af forståelsesmæssige grunde er vigtigt, vil vi eksplicit nævne, om den betragtede løsning er maksimal.

Definition 259 *Ved* begyndelsesværdiproblemet *for differentialligningen (*) forstås bestemmelsen af den eller de maksimale løsninger til (*), der også opfylder en begyndelsesbetingelse af formen* $y(t_0) = y_0$*, hvor* $(t_0, y_0) \in D$*.*

Efter således at have overstået de mest grundlæggende definitioner, er det mest presserende spørgsmål, om begyndelsesværdiproblemet for differentialligningen (*) overhovedet har nogen løsning, og i givet fald hvor mange forskellige maksimale løsninger. Vi nævner først uden bevis en ren eksistenssætning.

Sætning 260 ***Peano's eksistenssætning****. Lad* D *være en åben delmængde af* R^2 *og lad* $(t_0, y_0) \in D$*. Antag, at* f *er en kontinuert funktion defineret på* D*. Så har begyndelsesværdiproblemet* $y(t_0) = y_0$ *for differentialligningen* $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ *mindst én maksimal løsning.*

Bemærkning 261 *Vi beklager, at der optræder begrebet kontinuitet af funktion af 2 variable, et begreb, som læseren ikke formodes at have kendskab til. Da læseren dog har kendskab til kontinuitetsbegrebet for funktion af én variabel, kan man håbe, at det indtryk efterlades, at næsten alle begyndelsesværdiproblemer for differentialligninger af første orden har mindst én løsning.*

I afsnittet om separable differentialligninger gives et eksempel på en differentialligning, der opfylder betingelserne i Peanos eksistenssætning, men som har mere end én maksimal løsning gående gennem et givet punkt (faktisk uendeligt mange).

Hovedresultatet i dette kapitel er Picard-Lindelöf' s sætning (Emile Picard, 1856-1941, og Ernst Lindelöf, 1870-1946), men først en definition.

Definition 262 *Lad f være en funktion defineret på en delmængde D af R^2. Vi vil sige, at f opfylder en Lipschitz-betingelse i D m.h.t. y, hvis der findes en konstant L, så*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

for hver to punkter (t,y_1), $(t,y_2) \in D$. L vil vi kalde en Lipschitz-konstant for f på D. Hvis D er åben og hvis f opfylder en Lipschitz-betingelse på enhver begrænset og lukket delmængde K af D, så vil vi sige, at f lokalt i D opfylder en Lipschitz-betingelse m.h.t. y. Lipschitz-konstanten kan afhænge af K.

Sætning 263 ***Picard-Lindelöf's sætning***. *Lad D være en åben delmængde af R^2. Lad f være en kontinuert funktion defineret på D, og antag, at f lokalt i D opfylder en Lipschitz-betingelse m.h.t. y. Lad $(t_0,y_0) \in D$. Så har begyndelsesværdiproblemet $y(t_0) = y_0$ for differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ netop én maksimal løsning.*

Korollar 264 *Lad D være en åben delmængde af R^2. Lad f være en kontinuert funktion defineret på D, og antag, at f har en kontinuert partiel afledet m.h.t. y i D. Lad $(t_0,y_0) \in D$. Så har begyndelsesværdiproblemet $y(t_0) = y_0$ for differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ netop én maksimal løsning.*

Bevis. (for Picard Lindelöfs sætning). Vi giver kun idéen i beviset. Alle de besværlige tekniske detaljer må vi udelade. Bemærk, at en differentiabel funktion ϕ defineret på et interval I er løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0$$

hvor $(t_0,y_0) \in D$, hvis og kun hvis ϕ er løsning til integralligningen

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \qquad (**)$$

Bemærk iøvrigt, at enhver kontinuert løsning til (**) automatisk er differentiabel. Man skal så vise, at (**) har netop én maksimal løsning.Man skal dels vise, at integralligningen (**) har mindst én løsning (eksistensdelen af beviset), dels vise, at (**) har højst én løsning (entydighedsdelen).

1. **Eksistensdelen**. Vi sætter $\phi_0(t) = y_0$ for alle t. Herefter defineres ϕ_1 ved

$$\phi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))\, ds$$

Dernæst defineres ϕ_2 ved

$$\phi_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_1(s))\, ds$$

Således fortsættes. Generelt defineres ϕ_{n+1} udfra ϕ_n ved

$$\phi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))\, ds$$

Man skal nu vise, at funktionsfølgen $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerer mod en kontinuert funktion ϕ, og at ϕ opfylder integralligningen (**). Hermed vil beviset for eksistensdelen være ført.

2. **Entydighedsdelen**. Antag, at ϕ og ψbegge er løsninger til integralligningen (**) på det lukkede interval I. Så forløber begge grafer indenfor en lukket og begrænset delmængde K af D. Lad $L = L(K)$ være en Lipschitz-konstant for f på K. For overskuelighedens skyld antager vi, at $t \geq t_0$. Argumentet er analogt for $t \leq t_0$. Så fås af (**) med y lig henholdsvis ϕ og ψ:

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \int_{t_0}^{t} L\, |\phi(s) - \psi(s)|\, ds$$

Men en kontinuert og ikke-negativ funktion f, der opfylder

$$f(t) \leq L \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

kan vises at være identisk nul. Sætter vi nemlig $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$, så har vi

$$F'(t) \leq LF(t)$$

Men vi har

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq LF(t) \Longleftrightarrow F'(t) - LF(t) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow e^{-Lt}F'(t) - e^{-Lt}LF(t) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(e^{-Lt}F(t)\right)' \leq 0 \end{aligned}$$

Integration fra t_0 til t_1 giver

$$e^{-Lt_1}F(t_1) \leq 0$$

altså $F(t_1) \leq 0$ for alle $t_1 \geq t_0$. Men da åbenbart $F(t_1) \geq 0$, må vi konkludere, at $F(t_1) = 0$ for alle $t_1 \geq t_0$. Det samme må derfor gælde for f. Dette viser, at de to løsninger ϕ og ψ er ens

■

Eksempel 265 *Vi vil finde de to første Picard-Lindelöf approksimationer* ϕ_1 *og* ϕ_2 *for begyndelsesværdi problemet*

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1$$

Med $y_0 = 1$ *og* $t_0 = 0$ *finder vi, idet* $\phi_0(t) = y_0 = 1$*, at*

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))\, ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(s^2 + 1\right) ds = 1 + t + \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

Herefter fås videre

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_1(s))\, ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(s^2 + \left(1 + s + \frac{1}{3}s^3\right)^2\right) ds \\ &= 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \end{aligned}$$

Bemærkning 266 *Picard-Lindelöf-approksimationerne kan udmærket bruges som substitut for dén eksakte løsning, som man måske ikke kan bestemme. Den åbenbare svaghed ved metoden er, at integralet* $\int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))\, ds$ *næppe kan udregnes i særligt mange tilfælde.*

7.2 Separation af de variable

En separabel differentialligning er en differentialligning, der kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dt} = h(t)\, g(y)$$

hvor højresiden altså kan skrives som et produkt af to faktorer, hvor den ene ikke indeholder y og den anden ikke indeholder t (uden gennem $y(t)$).

Eksempel 267 *Differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} = e^{-3t} y(1 - y)$$

er separabel.

Løsning af separable differentialligninger er jo pensum i gymnasiet, så vi forudsætter en vis erfaring med løsningen af sådanne. Her følger dog en noget voldsomt udseende sætning, der siger, hvordan løsningerne kan findes.

Sætning 268 *Betragt i området $I \times J$ differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} = h(t)\, g(y) \tag{*}$$

hvor h er kontinuert på det åbne interval I og g kontinuert på det åbne interval J. Så gælder:

1. *Lad f være en funktion, der på intervallet $I_1 \subseteq I$ opfylder $g(f(t)) \neq 0$ for alle $t \in I_1$. Så er $y = f(t)$ løsning til differentialligningen (*) på intervallet I_1, hvis og kun hvis $y = f(t)$ på intervallet I_1 er løsning til ligningen*

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\, dt + k \tag{**}$$

   for en eller anden konstant k.

2. *Antag, at h ikke er identisk lig nul i I. Så er $y = f(t) = y_0$, $t \in I$, en konstant løsning til (*), hvis og kun hvis $g(y_0) = 0$.*

3. *Hvis $y = f(t)$, $t \in I_1$, er en ikke-konstant løsning til (*) og hvis der findes et $t_0 \in I_1$, så $f(t_0) = y_0$, hvor $g(t_0) = 0$, så går der mindst to løsninger gennem punktet (t_0, y_0).*

4. *Hvis begyndelsesværdiproblemet for (*) har entydigt bestemte løsninger gennem ethvert punkt i $I \times J$, så består den fuldstændige løsning til (*) af de løsninger, der findes ved separation af de variable (altså de løsninger, der findes under (a)) samt af eventuelle konstante løsninger.*

Bevis. (1) Lad $y = f(t)$ være en løsning til differentialligningen (*) på intervallet $I_1 \subseteq I$ med $g(f(t)) \neq 0$ for alle $t \in I_1$. Så har vi

$$f'(t) = g(f(t))\, h(t)$$

for alle $t \in I_1$.Ved division med $g(f(t))$ fås

$$\frac{f'(t)}{g(f(t))} = h(t)$$

Ved ubestemt integration m.h.t. t følger, at der findes en konstant k, så

$$\int \frac{f'(t)}{g(f(t))} dt = \int h(t)\, dt + k$$

I integralet på venstre side indfører vi substitutionen $y = f(t)$. Vi finder så $dy = f'(t)\, dt$, hvormed vi har

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\, dt + k$$

hvilket er (**). Antag omvendt, at $y = f(t)$ er en løsning til ligningen (**) på intervallet $I_1 \subseteq I$ med $g(f(t)) \neq 0$ for alle $t \in I_1$for en eller anden værdi af konstanten k. Vi kan skrive (**) på formen $G(y) = H(t) + k$, hvor $G(y)$ er en stamfunktion til $\frac{1}{g(y)}$ på et interval $J_1 \subseteq J$ på hvilket $g(y) \neq 0$, og som indeholder værdimængden for $f(t), t \in I_1$, og hvor H er en stamfunktion til h på I_1. Da dermed $f(t) = G^{-1}(H(t))$, er f differentiabel på I_1, og vi har $G'(f(t)) f'(t) = H'(t)$, d.v.s. $\frac{f'(t)}{g(f(t))} = h(t)$ for alle $t \in I_1$. Altså gælder også $f'(t) = g(f(t)) h(t)$, d.v.s. at f på I_1 opfylder (*).

(2) Hvis $g(y_0) = 0$, så er $y = f(t) = y_0$, $t \in I$, klart løsning til (*). Hvis omvendt $y = f(t) = y_0$, $t \in I_1$, er løsning til (*), så er enten $g(y_0) = 0$ eller $h(t) = 0$ for alle $t \in I_1$. Hvis derfor $I_1 = I$, og h ikke er identisk lig nul i I, så må $g(y_0)$ være lig nul.

(3) Påstanden følger af, at også den konstante løsning $y = y_0$ går gennem (t_0, y_0).

(4) Følger umiddelbart af (a), (b) og (c). ∎

Sætning 269 *Lad I og J være åbne intervaller. Lad h være kontinuert på I og lad g være differentiabel på J med kontinuert afledet g', så har begyndelsesværdiproblemet*

$$\frac{dy}{dt} = h(t) g(y), \quad y(t_0) = y_0$$

hvor $t_0 \in I$ og $y_0 \in J$ præcis én (maksimal) løsning.

Bevis. Resultatet følger umiddelbart af korollaret til Picard-Lindelöf's sætning. ∎

Bemærkning 270 *Ved separation af de variable opnås som beskrevet en ligning (**) mellem t og y. Ligningen er ofte temmelig vanskelig at løse, undertiden er det nødvendigt at løse den ved hjælp af numeriske metoder. I så fald kunne det være en fordel i stedet at løse selve differentialligningen numerisk.*

Bemærkning 271 *I de tilfælde, hvor det er lykkedes at løse (**) m.h.t. y, er det ofte svært at bestemme det interval på hvilket det fundne funktionsudtryk løser differentialligningen. Ofte afhænger dette definitionsinterval af konstanten k.*

Eksempel 272 *Vi løser differentialligningen fra eksemplet ovenfor:*

$$\frac{dy}{dt} = e^{-3t} y(1-y)$$

Da $h(t) = e^{-3t}$ er kontinuert på R og da $g(y) = y(1-y)$ åbenbart er differentiabel med kontinuert differentialkvotient $g'(y) = 1 - 2y$ på R, går der igennem ethvert punkt i planen $R^2 = R \times R$ netop én løsning. Vi undersøger først, om differentialligningen har konstante løsninger. Vi skal da løse ligningen $g(y) = 0$, d.v.s. $y(1-y) = 0$. Denne ligning har åbenbart løsningerne 0 *og* 1*. Altså har differentialligningen de to konstante løsninger* $y = 0$ *og* $y = 1$*. Vi kan allerede nu sige en hel del om de andre løsningers forløb. Opfylder en løsning* $y(t)$ *uligheden* $y(t_0) > 1$ *("område 1") på et tidspunkt* t_0*, så vil den altid have gjort det og vil vedblive med at gøre det. Løsningen kan jo ikke krydse den konstante løsning* $y = 1$ *på grund af entydighed af løsninger. Det samme kan siges om en løsning, der opfylder* $0 < y(t_0) < 1$ *("område 2") og om en løsning, der opfylder* $y(t_0) < 0$ *("område 3"). Vi kan endda udfra differentialligningen afgøre monotoniforholdene for løsningerne i de 3 områder. I område 1 er* $y'(t) = e^{-3t} y(t)(1 - y(t)) < 0$*, da* $y(t) > 1$*. Altså er løsningerne i område 1 aftagende. Det samme er løsningerne i område 3, mens løsningerne i område 2 er voksende.*

Vi bestemmer nu formeludtryk for de løsninger, der ligger i de tre ovennævnte områder. Disse løsninger findes ved separation

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int e^{-3t} dt$$

hvoraf

$$\ln|y| - \ln|y-1| = -\frac{1}{3} e^{-3t} + C$$

Her er $C \in R$ *en integrationskonstant. Ved sammenskrivning af de to logaritmer fås*

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = -\frac{1}{3} e^{-3t} + C$$

hvorefter vi finder

$$\left|\frac{y}{y-1}\right| = \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t} + C\right) = e^C \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t}\right)$$

Numerisktegnet kan fjernes mod, at der sættes $\pm$ *på højresiden:*

$$\frac{y}{y-1} = \pm e^C \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t}\right) = K \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t}\right)$$

hvor vi har sat $K = \pm e^C$*. Bemærk, at* K *nødvendigvis må være forskellig fra nul. Vi skal nu løse ligningen*

$$\frac{y}{y-1} = u = K \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t}\right)$$

Vi finder:

$$\begin{aligned} \frac{y}{y-1} &= u \Longleftrightarrow y = (y-1)u = yu - u \\ &\Longleftrightarrow yu - y = u \Longleftrightarrow y = \frac{u}{u-1} \end{aligned}$$

Altså har vi

$$y(t) = \frac{K \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t}\right)}{K \exp\left(-\frac{1}{3} e^{-3t}\right) - 1} = \frac{K}{K - \exp\left(\frac{1}{3} e^{-3t}\right)}$$

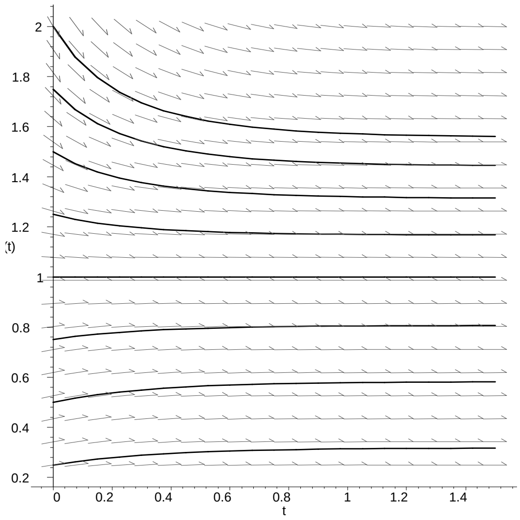
hvor $K \in R\backslash\{0\}$. Hermed har vi altså fundet en formel for de løsninger, der befinder sig i de tre områder adskilt af de konstante løsninger.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen består da af disse samt de to konstante løsninger, $y = 0$ og $y = 1$. Den første af de konstante løsninger kan indkorporeres i den generelle formel ved alligevel at tillade $K = 0$.

Hvis begyndelsesbetingelsen $y(0) = \frac{1}{2}$ er givet, finder vi ved indsættelse konstanten K til $-\exp\left(\frac{1}{3}\right)$. Altså fås løsningen

$$y(t) = \frac{-\exp\left(\frac{1}{3}\right)}{-\exp\left(\frac{1}{3}\right) - \exp\left(\frac{1}{3}e^{-3t}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\right)}$$

Bemærk, at $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{1+\exp(-1/3)}$.



Grafer for 8 løsninger til $y' = e^{-3t}y(1 - y)$

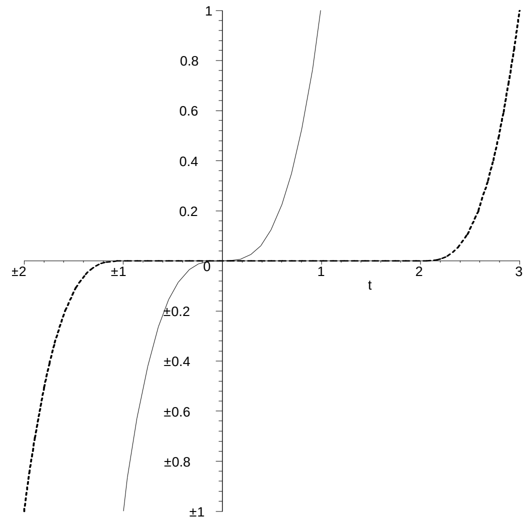
Eksempel 273 *Som et eksempel på, at der kan gå to løsninger gennem samme punkt tager vi differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

Vi ser, at $y = 0$ er en konstant løsning. Ved separation af de variable findes løsningerne $y = f(t) = (t + k)^3$. Løsningsmetoden kræver $f(t) = (t + k)^3 \neq 0$, men det ses ved direkte indsættelse i differentialligningen (*), at $y = f(t) = (t + k)^3$ er løsning for alle $t \in R$. Gennem $(0, 0)$ går nu foruden den konstante løsning $y = 0$ også løsningen $y = t^3$. I virkeligheden er det endnu værre, idet man ved sammenstykning af den konstante løsning med løsningen $y = (t + k)^3$ i punktet $t = -k$ kan konstruere uendeligt mange løsninger, der alle går gennem $(0, 0)$. Lad nemlig $k_1 \leq 0 \leq k_2$, og lad f være den funktion, der er givet ved *følgende forskrift*

$$f(t) = \begin{cases} (t-k_1)^3 & for \quad t \le k_1 \\ 0 & for \quad k_1 < t < k_2 \\ (t-k_2)^3 & for \quad t \ge k_2 \end{cases}$$

så er f løsning til (*) på R, og dens graf går gennem $(0,0)$. Hvis vi tillader $k_1 = -\infty$ og $k_2 = \infty$, så giver ovenstående forskrift faktisk samtlige løsninger, der går gennem $(0,0)$. Bemærk, at $g(y) = 3y^{2/3}$ ikke er differentiabel for $y = 0$ (jvnf. Bemærkning 1 ovenfor).



Løsningen med $k_1 = -1, k_2 = 2$ og løsningen med $k_1 = k_2 = 0$.

Øvelse 274 *Figuren ovenfor kan med rimelighed siges at vise graferne for 9 forskellige løsninger til begyndelsesværdiproblemet*

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$$

. Hvordan det?

Bemærkning 275 *Lad os tænke os, at differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

kunne være den lov, der styrede tidsudviklingen for en eller anden fysisk størrelse y, og at denne størrelse kunne antage værdien nul. Eksistensen af de uendeligt mange løsninger til differentialligningen med $y(0) = 0$ viser, at udtalelser om den fremtidige og fortidige opførsel af y ville være behæftet med en betydelig usikkerhed: Lad os sige, at y er målt til værdien y_0 til tiden $t = 0$. Hvis $y_0 = 0$, *så fremgår den mulige fremtidige og fortidige opførsel af den i eksemplet givne formel for samtlige løsninger. Hvis $y_0 > 0$ kan vi på lignende vis konstruere uendeligt mange mulige fortidige opførsler, hvorimod den fremtidige opførsel ligger fast. Det er præcis omvendt, hvis $y_0 < 0$. Det siger sig selv, at en sådan naturlov er temmelig mangelfuld. Det er derfor af stor betydning at kunne give betingelser for, at begyndelsesværdiproblemet for (*) har præcis én løsning.*

P[redacted] trods af det, der lige er blevet sagt, optr[redacted]der en differentialligning, der ligger t[redacted]t op ad den n[redacted]vnte i en matematisk model for forbr[redacted]nding af f.eks. tr[redacted].

Eksempel 276 ***Forbrænding af træ.*** *Lad $m(t)$ betegne massen af træet til tiden t. Antag, at temperaturen under forbrændingen er konstant. Så er det en rimelig antagelse at gøre, at forbrændingshastigheden er proportional med træets overfladeareal A, altså*

$$\frac{dm}{dt} = -k_1 A$$

Hvis træet under forbrændingen ikke ændrer form, men kun størrelse, da vil massen m være proportional med en vilkårlig karakteristisk længde L opløftet til tredie potens, og overfladearealet A vil være propoptional med længden L i anden potens, altså

$$\begin{aligned} m &= \alpha L^3 \\ A &= \beta L^2 \end{aligned}$$

Vi eliminerer L:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \\ A &= \beta L^2 = \beta\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = \beta\alpha^{-\frac{2}{3}} m^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

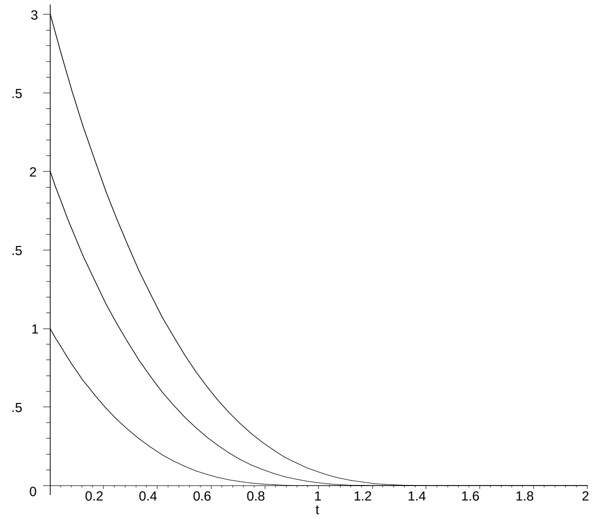
Dermed finder vi følgende differentialligning for m

$$\frac{dm}{dt} = -k_1 A = -k_1\beta\alpha^{-\frac{2}{3}} m^{\frac{2}{3}} = -k m^{\frac{2}{3}}$$

hvor $k = k_1\beta\alpha^{-\frac{2}{3}}$ er en positiv konstant. Ved udregninger som i forrige eksempel finder vi følgende løsning, når det forudsættes, at $m(0) = m_0 > 0$:

$$m(t) = \begin{cases} \left(m_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}kt\right)^3 & for \quad t \le \tau = \frac{3}{k} m_0^{\frac{1}{3}} \\ 0 & for \quad t > \tau \end{cases}$$

Den givne løsning er den eneste, der opfylder begyndelsesbetingelsen $m(0) = m_0 > 0$ og samtidigt opfylder betingelsen $m(t) \ge 0$ for alle $t \ge 0$. Størrelsen τ er den tid til hvilken brændet er brændt. Bemærk nu, at løsningens graf går gennem $(\tau, 0)$. Der er imidlertid uendeligt mange løsninger til forbrændings-differentialligningen, der går gennem dette punkt, nemlig alle dem, der svarer til *en startbrændemængde, der er mindre end eller lig* m_0. *Dette bør ikke overraske, idet det blot betyder, at er der mindre brænde til at begynde med, da er bålet tidligere brændt ned. Når det forlanges, at* $m(t) \geq 0$ *for alle* $t \geq 0$, *har vi her et eksempel på en differentialligning, for hvilken der nok er entydighed af alle løsninger fremad i tiden, men ikke entydighed af alle løsninger bagud i tiden.*



3 løsninger til $m' = -3m^{\frac{2}{3}}$

7.2.1 Løsning ved tricks

Eksempel 277 *Betragt differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2 + 2ty = (t+y)^2$$

Den er åbenbart ikke separabel, men ved et lille trick kan den løses ved separation. Introducér den nye ubekendte funktion v *ved* $v(t) = t + y(t)$. *Hermed fås*

$$\frac{dv}{dt} = v'(t) = 1 + y'(t) = 1 + v(t)^2$$

der jo er separabel. Ved separation fås $\arctan v = t + C$, *altså* $v(t) = \tan(t + C)$. *Hermed har vi* $y(t) = -t + \tan(t + C)$. *Definitionsintervallerne for løsningerne er* $\left]-C - \frac{\pi}{2} + p\pi, -C + \frac{\pi}{2} + p\pi\right[$, *hvor* $p \in Z$. *Differentialligninger af typen* $\frac{dy}{dt} = f(at + by + c)$, *hvor* $b \neq 0$, *kan løses på denne måde.*

Eksempel 278 *Betragt for* $t > 0$ *differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} + y^2 = 2t^{-2}$$

Lad $v(t) = ty(t)$, *så fås*

$$tv' = t(y + ty') = t\left(y + t\left(2t^{-2} - y^2\right)\right) = v - v^2 + 2$$

Den nye funktion v opfylder altså en separabel differentialligning. Da polynomiet $v - v^2 + 2 = -(v+1)(v-2)$ har rødderne -1 og 2, har differentialligningen de konstante løsninger $v(t) = -1$ og $v(t) = 2$. Dermed har den oprindelige differentialligning løsningerne $y(t) = -\frac{1}{t}$ og $y(t) = \frac{2}{t}$. Ved separation af $t\frac{dv}{dt} = -(v+1)(v-2)$ fås for $v \neq -1, 2$ efter lidt arbejde

$$v(t) = \frac{2t^3 + K}{t^3 - K}$$

hvor $K \neq 0$. Vi ser, at hvis K sættes lig nul i denne formel, fås den konstante løsning $v = 2$, hvorimod den konstante løsning $v = -1$, lidt løst sagt, svarer til $K = \infty$. Hermed har vi løsningerne $y(t) = \frac{2t^3+K}{t(t^3-K)}$, hvor $K \in R$, samt $y(t) = -\frac{1}{t}$. Definitionsintervallerne for de forskellige løsninger fås af forlangendet $t^3 - K \neq 0$ (sammen med $t > 0$).

7.2.2 Differentialligninger af typen $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$

Definition 279 *En differentialligning, der kan skrives på formen*

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

kaldes homogen.

Bemærkning 280 *Senere vil vi (i forbindelse med lineære differentialligninger) også bruge ordet homogen i en anden betydning.*

Løsningsmetoden består i at introducere en ny ubekendt funktion v i stedet for y. Vi sætter $v(t) = \frac{y(t)}{t}$ for $t \neq 0$, altså $y(t) = tv(t)$. Hermed fås $y' = tv' + v$, der indsat i differentialligningen giver

$$t\frac{dv}{dt} + v = tv' + v = f(v)$$

Vi ser, at denne differentialligning er separabel. Det er deri, at metodens succés består.

Eksempel 281 *Løs begyndelsesværdiproblemet*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + ty + y^2}{t^2}, \qquad y(1) = 1, \qquad t > 0.$$

Vi bemærker, at højre side kan skrives som $1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$. Differentialligningen er altså homogen. Vi sætter derfor $y = tv$, hvor v er en ny ubekendt funktion. Med $y' = tv' + v$ fås følgende differentialligning for v:

$$t\frac{dv}{dt} + v = 1 + v + v^2$$

altså

$$t\frac{dv}{dt} = 1 + v^2$$

Denne differentialligning er separabel. Da den ingen konstante løsninger har, findes samtlige løsninger ved separation af de variable. Vi finder:

$$\arctan v = \ln t + C$$

Før vi går videre, bestemmer vi konstanten udfra den givne begyndelsesværdi $y(1) = 1$*. Vi finder* $C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$*. Hermed har vi* $v = \tan\left(\ln t + \frac{\pi}{4}\right)$ *og dermed*

$$y(t) = t\tan\left(\ln t + \frac{\pi}{4}\right)$$

defineret på intervallet I *givet ved* $\ln t + \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*, hvilket giver* $I = \left]e^{-3\pi/4}, e^{\pi/4}\right[$.

7.3 Lineære differentialligninger af 1.orden

En differentialligning af første orden, der kan skrives på formen

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t)$$

kaldes en lineær differentialligning. På ethvert interval I, hvor $a(t) \neq 0$, for alle $t \in I$, kan ligningen *normeres* ved division med $a(t)$. Herved opnår differentialligningen følgende form

$$y' + p(t)\,y = q(t)\,, \qquad t \in I$$

Vi forudsætter i det følgende, at både p og q er kontinuerte på et interval I.

Sætning 282 *Lad* p *og* q *være kontinuerte funktioner defineret på intervallet* I*. Så er den fuldstændige løsning til*

$$y' + p(t)\,y = q(t) \tag{DL}$$

givet ved formlen

$$y(t) = e^{-P(t)}\int e^{P(t)}q(t)\,dt + Ce^{-P(t)} \tag{*}$$

hvor P *er en vilkårligt valgt stamfunktion til* p*, og hvor* $C \in R$ *er en arbitrær konstant. Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen* $y(t_0) = y_0$ *er givet ved følgende formel, der indeholder et bestemt integral:*

$$y(t) = e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)\,ds + y_0e^{-P(t)} \tag{**}$$

hvor P *nu er den stamfunktion til* p*, der er nul for* $t = t_0$*, altså* $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$*.*

Bemærkning 283 *Vi ser, at enhver løsning til den lineære differentialligning (DL) er defineret på hele I. Dette er ofte ikke tilfældet for ikke-lineære differentialligninger. Formlen (*) (og også (**)) kaldes ofte for Panserformlen.*

Bevis. Da p er kontinuert på I, har p en stamfunktion på dette interval. Lad P være en sådan. Da $e^{P(t)} > 0$ for alle $t \in I$, har differentialligningen (DL) de samme løsninger som følgende differentialligning

$$y'(t)\, e^{P(t)} + p(t)\, e^{P(t)} y(t) = e^{P(t)} q(t)$$

Men venstre side heraf er differentialkvotienten af produktet $e^{P(t)} y(t)$. D.v.s. ovenstående kan skrives på formen

$$\frac{d}{dt}\left(e^{P(t)} y(t)\right) = e^{P(t)} q(t)$$

Denne differentialligning er imidlertid ensbetydende med, at $e^{P(t)} y(t)$ er en stamfunktion til $e^{P(t)} q(t)$, d.v.s. ensbetydende med eksistensen af en konstant $C \in R$, så

$$e^{P(t)} y(t) = \int e^{P(t)} q(t)\, dt + C$$

hvor vi her med det ubestemte integral betegner en vilkårligt valgt stamfunktion til $e^{P(t)} q(t)$. Denne sidste ligning er åbenbart ækvivalent med formlen (*). Formlen (**) fås ved for det første at vælge P som angivet i sætningen, så har vi åbenbart $P(t_0) = 0$. Dernæst integreres $\frac{d}{dt}\left(e^{P(t)} y(t)\right) = e^{P(t)} q(t)$ fra t_0 til t. Heraf følger (**) umiddelbart. ■

Mest af hensyn til den senere behandling af lineære differentialligninger af højere orden viser vi en generel sætning om strukturen af den fuldstændige løsning til den lineære differentialligning af første orden.

Sætning 284 *Den fuldstændige løsning til differentialligningen (DL)*

$$y' + p(t)\, y = q(t) \qquad \text{(DL)}$$

er lig med summen af en partikulær løsning, y_p, til ligningen og den fuldstændige løsning, y_{hom}, til den tilsvarende homogene ligning

$$y' + p(t)\, y = 0 \qquad \text{(homDL)}$$

altså $y = y_p + y_{\text{hom}}$.

Bevis. Vi giver to beviser.

1. Den fuldstændige løsning til (DL) er givet i Sætning 4.1 ved (*). Når $C = 0$ i (*) fås en løsning. Den betegner vi med y_p. Det er en partikulær løsning. Formlen (*) gælder selvfølgelig også for det specielle tilfælde, at $q(t) = 0$ for alle $t \in I$. Men så fås den fuldstændige løsning til den homogene ligning til $y_{\text{hom}} = Ce^{-P(t)}$. Sætningen følger nu ved at udnytte den påviste fortolkning af de to led i (*).

2. Dette bevis udnytter ikke Sætning 4.1. Antag, at y_p er en løsning til (DL) og at y_h er en løsning til (homDL). Så er $y = y_p + y_h$ løsning til (homDL), idet

$$\begin{aligned}(y_p + y_h)' + p(t)(y_p + y_h) &= y_p' + y_h' + p(t)\,y_p + p(t)\,y_h \\ &= \left(y_p' + p(t)\,y_p\right) + \left(y_h' + p(t)\,y_h\right) = q(t) + 0 = q(t)\end{aligned}$$

Hvis omvendt $y_1$og y_2 begge er løsninger til (DL), så er $y = y_1 - y_2$ løsning til (homDL), idet

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)' + p(t)(y_1 - y_2) &= y_1' - y_2' + p(t)\,y_1 - p(t)\,y_2 \\ &= (y_1' + p(t)\,y_1) - (y_2' + p(t)\,y_2) = q(t) - qt0 = 0\end{aligned}$$

Heraf følger sætningen.

■

Eksempel 285 *Differentialligningen*

$$ty' + 2y = te^{-t}$$

betragtes for $t > 0$*. Den ønskes løst, og det ønskes vist, at netop én løsning har en grænseværdi for* $t \downarrow 0$*. Ligningen er åbenbart lineær. Vi normerer først ligningen:*

$$y' + \frac{2}{t}y = e^{-t}$$

Panserformlens P *er givet ved* $P(t) = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t$*, så vi finder, at* $e^{P(t)} = e^{2\ln t} = t^2$ *og* $e^{-P(t)} = t^{-2}$*. Hermed er den fuldstændige løsning givet ved*

$$\begin{aligned}y(t) &= t^{-2}\int t^2e^{-t}dt + Ct^{-2} \\ &= t^{-2}\left(-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\right) + Ct^{-2} \\ &= -\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right)e^{-t} + \frac{C}{t^2}\end{aligned}$$

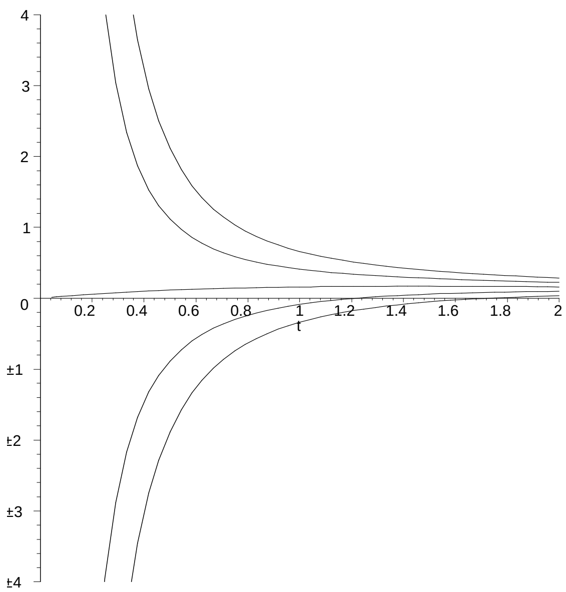
hvor $C \in R$*. Vi viser nu, at der er netop én løsning, der har en grænseværdi for* $t \downarrow 0$*. Vi skriver først den fuldstændige løsning på formen*

$$y(t) = \frac{C - \left(t^2 + 2t + 2\right)e^{-t}}{t^2}$$

Da nævneren går mod nul for $t \downarrow 0$*, er det nødvendigt, at tælleren også gør, hvis brøken da skal have en grænseværdi. Men så må vi have, at* $C = 2$*. Nu går både tæller og nævner mod nul. Vi bruger l'Hospitals regel:*

$$\frac{-(2t+2)e^{-t} + \left(t^2 + 2t + 2\right)e^{-t}}{2t} = \frac{t^2e^{-t}}{2t} = \frac{1}{2}te^{-t} \to 0$$

for $t \downarrow 0$*. For* $C = 2$ *har vi altså, at* $y(t) \to 0$ *for* $t \downarrow 0$*. De øvrige løsninger deler sig i to grupper: For* $C < 2$ *gælder, at* $y(t) \to -\infty$*, og for* $C > 2$ *gælder, at* $y(t) \to \infty$ *for* $t \downarrow 0$*.*



Løsninger svarende til $C = 1.5, 1.75, 2, 2.25$ *og* 2.5

Øvelse 286 *Betragter man figuren ovenfor kunne man måske fristes til at påstå, at løsningen svarende til* $C = 2$ *er den eneste, der ikke er monoton. Kan det være rigtigt?*

Eksempel 287 *Vi betragter en omrørt tank med gennemstrømning. Tanken har konstant rumfang* V. *Gennem tanken strømmer pr. tidsenhed et væskerumfang på* F. *Den indkommende væske indeholder et stof A med en koncentration, der til tiden* t *er* $a_1(t)$. *I tanken foregår en kemisk reaktion*

$$A \longrightarrow Z$$

Den antages at være af første orden, d.v.s. at den mængde A, der omdannes pr. tidsenhed er proportional med den øjeblikkelige koncentration $a(t)$ *i tanken. Koncentrationen af den væske, der forlader tanken er til tiden* t *lig med* $a(t)$, *da der røres rundt i tanken.*

Vi kan nu opstille en differentialligning, der bestemmer tidsudviklingen for koncentrationen af stof A. Den samlede mængde A i tanken til tiden t er produktet af rumfang og koncentration, altså $Va(t)$. *Denne størrelses differentialkvotient m.h.t. tiden,* $\frac{d}{dt}(Va(t))$, *er derfor lig med forøgelsen af stof A pr. tidsenhed. Denne forøgelse af stof A pr. tidsenhed skyldes dels, at der pr. tidsenhed ankommer en mængde A på* $Fa_1(t)$, *dels at der pr. tidsenhed lukkes* $Fa(t)$ *ud, og endelig at der pr. tidsenhed omdannes en mængde A på* $kVa(t)$ *til Z. Proportionalitetskonstanten ("hastighedskonstanten") k er positiv, men afhænger normalt af temperaturen. Vi skal antage, at temperaturen holdes konstant, således at k kan regnes for konstant. Hermed har vi følgende massebalance*

$$\frac{d}{dt}(Va(t)) = Fa_1(t) - Fa(t) - kVa(t)$$

Idet rumfanget V er konstant kan denne differentialligning også skrives

$$a'(t) + \left(\frac{F}{V} + k\right) a(t) = \frac{F}{V} a_1(t)$$

Denne differentialligning er åbenbart lineær. Det er bekvemt at indføre størrelsen $\tau = \frac{V}{F}$, der er den tid, det tager at fylde tanken (eller tømme den). Differentialligningen kan da skrives

$$a'(t) + \left(\frac{1}{\tau} + k\right) a(t) = \frac{1}{\tau} a_1(t)$$

Antag nu, at koncentrationen i tanken til tiden $t = 0$ er kendt, lad os sige, at den er a_0, altså $a(0) = a_0$. Af panserformlen fås nu løsningen til begyndelsesværdiproblemet:

$$a(t) = e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau}+k\right)s} \frac{1}{\tau} a_1(s)\, ds + a_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \qquad (\#)$$

Vi kommer ikke længere, sålænge vi ikke antager noget om den indkommende koncentration a_1.

Lad os nu antage, at den indkommende koncentration er konstant: $a_1(t) = \alpha$ for alle $t \geq 0$, hvor α er en positiv konstant. Vi finder

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau}+k\right)s} \frac{\alpha}{\tau} ds + a_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \\ &= \frac{\alpha}{\tau} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \left[\frac{1}{\frac{1}{\tau}+k} e^{\left(\frac{1}{\tau}+k\right)s}\right]_0^t + a_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \\ &= \frac{\alpha}{1+k\tau} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \left(e^{\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} - 1\right) + a_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \\ &= \frac{\alpha}{1+k\tau} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t}\right) + a_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k\right)t} \end{aligned}$$

Vi ser, at $a(t) \to \frac{\alpha}{1+k\tau}$ for $t \to \infty$. Koncentrationen i tanken nærmer sig altså $\frac{\alpha}{1+k\tau}$ uanset hvilken begyndelseskoncentration, der var i tanken. Bemærk iøvrigt, at den konstante funktion $a_p(t) = \frac{\alpha}{1+k\tau}$ er en partikulær løsning til differentialligningen. Er begyndelseskoncentrationen $a_0 = \frac{\alpha}{1+k\tau}$, så vil $a(t)$ have den værdi også for alle $t > 0$.

7.3.1 Bernoulli-ligninger

Jacob Bernoulli (1654-1705) har givet navn til ligninger af typen

$$y' + p(t)\, y = q(t)\, y^n \qquad \text{(B)}$$

Hvis $n = 0$, så har vi den lineære differentialligning (DL). Hvis $n = 1$, kan ligningen skrives $y' + (p(t) - q(t))\, y = 0$, der er en homogen lineær differentialligning. De interessante tilfælde er derfor $n \neq 0, 1$. I de tilfælde, hvor n er negativ eller ikke hel, må naturligvis gøres forudsætninger om y bare af hensyn til eksistensen af y^n, men vi skal af hensyn til løsningsmetoden forudsætte $y \neq 0$ på det betragtede interval. Leibniz fandt i 1696 følgende løsningsmetode.

Introducér den nye ubekendte funktion v ved

$$v(t) = y(t)^{1-n}$$

Så har vi $v'(t) = (1-n)\, y(t)^{-n}\, y'(t)$. Multiplicér ligning (B) med $(1-n)\, y^{-n}$, så fås

$$(1-n)\, y^{-n} y' + (1-n)\, p(t)\, y^{1-n} = (1-n)\, q(t)$$

Udtrykt ved v giver det følgende ligning:

$$v' + (1-n)\, p(t)\, v = (1-n)\, q(t)$$

Denne differentialligning er lineær. Vi kan løse den v.hj.a. panserformlen (*). Herefter findes $y(t) = v(t)^{\frac{1}{1-n}}$.

Eksempel 288 ***Den logistiske ligning.*** *Vi tager som konkret eksempel på en Bernoulli-ligning den såkaldte logistiske ligning kendt fra populationsdynamikken:*

$$y' = ay - by^2 \qquad \text{(logist)}$$

Her betegner $y(t)$ antallet af individer til tiden t, så differentialligningen (logist) skal studeres for $y \geq 0$. Vi regner med, at vi kender antallet af individer til tiden $t = 0$, altså har givet en begyndelsesbetingelse $y(0) = y_0$. Leddet ay (hvor a er en positiv konstant) på højre side repræsenterer en tilvækst pr. tidsenhed proportional med det øjeblikkelige antal individer. Uden det andet led, $-by^2$ (hvor b er en positiv konstant), ville væksten blive eksponentiel. Dette andet led repræsenterer individernes hæmmende indvirkning på hinanden. Vi kunne kalde det et overbefolkningsled.

Hvis $y_0 = 0$ er $y(t) = 0$, $t \geq 0$, åbenbart en løsning, og dermed løsningen, da begyndelsesværdiproblemet for (logist) har entydigt bestemte løsninger. Antag derfor, at $y_0 > 0$. Så vil løsningen $y(t)$ ikke kunne antage værdien nul for nogen værdi af t. Differentialligningen (logist) er separabel, og kunne derfor løses som en sådan. Det er imidlertid også en Bernoulli-ligning. Vi prøver Leibniz' løsningsmetode: Da $n = 2$, sætter vi $v = y^{-1}$, og finder følgende ligning for v:

$$v' + av = b$$

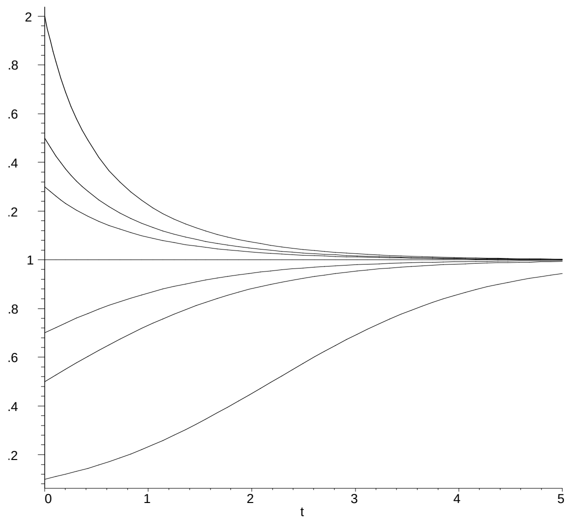
Denne er som ventet lineær, og iøvrigt særlig simpel, da a og b er konstanter. Ved indsættelse i panserformlen (**) fås

$$v(t) = e^{-at} \int_0^t e^{as} b\, ds + v_0 e^{-at} = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right) + v_0 e^{-at}$$

Idet $v_0 = \frac{1}{y_0}$ og $y = \frac{1}{v}$, fås så efter lidt omordning

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b} y_0}{y_0 + \left(\frac{a}{b} - y_0\right) e^{-at}}$$

Det ses ved inspektion, at denne formel også gælder for det trivielle tilfælde $y_0 = 0$*. Bemærk, at det følger af formlen for* $y(t)$*, at* $y(t) \to \frac{a}{b}$ *for* $t \to \infty$*. Bemærk også, at hvis* $y_0 = \frac{a}{b}$*, så har vi en konstant løsning* $y(t) = \frac{a}{b}$*.*



7 løsninger til den logistiske ligning $y' = y(1-y)$

Øvelse 289 *Det fremgår af figuren ovenfor, at grafen for visse løsninger til den logistiske ligning har vendetangent for et* $t > 0$*. Vis, at løsningerne til* $y' = y(1-y), \quad y(0) = y_0$ *har vendetangent for et* $t > 0$*, netop når* $0 < y_0 < \frac{1}{2}$*.*

7.4 Approksimativ løsning af differentialligninger

På trods af de mange løsningsmetoder, vi har set i det foregående, er det nærmest at betragte som en undtagelse, når løsningerne til en differentialligning kan udtrykkes eksplicit ved elementære funktioner, selvom differentialligningen selv kun indeholder sådanne. Dette problem har vi allerede ved løsning af den simple differentialligning $y' = h(t)$, hvis løsninger jo blot er stamfunktionerne til h. Det er velkendt (men ingenlunde let at vise), at mange simple kombinationer af elementære funktioner ikke har stamfunktioner, der kan udtrykkes ved elementære funktioner. Eksempler er $\frac{e^t}{t}$ og $\sin(t^2)$. Bemærk iøvrigt, at hvis man er uvidende om logaritmefunktionen, så kan man ikke udtrykke $\int \frac{1}{t} dt$ ved kendte elementære funktioner.

Problemet møder os da med dobbelt styrke ved løsning af en lineær differentialligning af første orden, hvor der dog findes en formel. Denne formel kræver imidlertid to stamfunktionsbestemmelser. Det samme gælder løsningen af separable differentialligninger. Her har vi til og med den yderligere komplikation, at løsningen i første omgang kun findes givet implicit. Selv hvis integrationerne gik glat, er det ofte umuligt at løse eksplicit for y.

Helt galt går det, når ingen af vore metoder (eller andre vi kunne tænke på) virker. Så står vi tilbage med Peano's eller Picard-Lindelöf's eksistenssætning, der forsikrer os om, at der da i hvertfald er en løsning. Beviset for Picard-Lindelöf's sætning indeholder også en anvisning på, hvordan man kan finde løsningen til et givet begyndelsesværdiproblem. Denne anvisning indeholder desværre uendeligt mange skridt, så den kan ikke forventes at give os den nøjagtige løsning i den tid, vi har til rådighed. Men den kan give os en approksimation til løsningen.

7.4.1 Picard-Lindelöf's metode

Vi illustrerer anvendelsen af Picard-Lindelöf's idé ved et eksempel. Vi vælger et simpelt eksempel, hvor vi også kan finde den eksakte løsning af hensyn til en kontrol af, hvor god metoden er.

Eksempel 290 *Betragt begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{*}$$

Løsningen er

$$\phi(t) = \frac{1}{1-t}, t \in \left]-\infty, 1\right[$$

Beviset for Picard-Lindelöf's sætning udnytter, at en differentiabel funktion ϕ defineret på et interval I er løsning til begyndelsesværdiproblemet (*), hvis og kun hvis ϕ er løsning til integralligningen

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)^2 \, ds$$

Denne integralligning er fremkommet ved integration af (*) fra 0 til t. Vi definerer nu en følge af funktioner $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$, på følgende måde: Vi sætter $\phi_0(t) = 1$ for alle $t \in R$. Herefter defineres ϕ_1 ved

$$\phi_1(t) = 1 + \int_0^t \phi_0(s)^2 \, ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t$$

Dernæst defineres ϕ_2 ved

$$\phi_2(t) = 1 + \int_0^t \phi_1(s)^2 \, ds = 1 + \int_0^t (1+s)^2 \, ds = 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

ϕ_3 defineres ved

$$\begin{aligned}
\phi_3(t) &= 1 + \int_0^t \phi_2(s)^2 \, ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + s^2 + \frac{1}{3}s^3\right)^2 ds \\
&= 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7
\end{aligned}$$

Således fortsættes. Vi ser, at regningerne meget hurtigt bliver meget besværlige. Generelt defineres ϕ_{n+1} udfra ϕ_n ved

$$\phi_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t \phi_n(s)^2\, ds$$

Vi ser, at ϕ_0 og $\phi_1$stemmer overens med løsningens Taylorpolynomier af 0'te og første grad henholdsvis, mens de første tre led i ϕ_2 og de første 4 led i ϕ_3 stemmer overens med Taylorpolynomierne af anden og tredie grad henholdsvis. Generelt kan det vises, at leddene i ϕ_n til og med n'te orden udgør løsningens n'te Taylorpolynomium.

Øvelse 291 *Find Picard-Lindelöf-approksimationerne for begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

Vis, at funktionsfølgen $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ kommer til at bestå af Taylorpolynomierne for løsningen et (med udviklingspunkt 0). Arbejder vi derfor på et bestemt begrænset interval omkring $t = 0$, vil $\phi_n(t)$ være en god approksimation til løsningen et, når blot n er tilstrækkelig stor (afhængig af den acceptable maksimale fejl).

Et problem med den skitserede metode er åbenbar. Den kræver ved hvert trin bestemmelsen af en stamfunktion. Dette giver intet principielt problem i eksemplet ovenfor, men regningerne bliver hurtigt uoverkommelige. Metoden kunne kombineres med en numerisk integrationsmetode som Simpsons metode.

Picard-Lindelöf-approksimationerne førte i øvelsen til Taylorpolynomierne for løsningen. Dette gælder som set i eksemplet ikke generelt, men dog næsten. Taylorpolynomierne kan imidlertid findes direkte udfra differentialligningen på følgende måde:

7.4.2 Taylorrække-metoden

Udgangspunktet er

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

Heraf følger, at løsningen ϕ foruden $\phi(t_0) = y_0$ også opfylder $\phi'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, y_0)$. Men så er det første Taylorpolynomium for ϕ med udviklingspunkt t_0 kendt. Det er jo nemlig givet ved

$$P_1(t) = \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0)$$

Differentiéres nu ligningen $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ fås (i dette abstrakte tilfælde, hvor f ikke er kendt, ved brug af kædereglen for funktion af to variable)

$$\phi''(t) = f_t(t, \phi(t)) + f_y(t, \phi(t))\, \phi'(t)$$

Dermed er $\phi''(t_0)$ kendt. Altså har vi bestemt det 2.Taylorpolynomium

$$P_2(t) = \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\phi''(t_0)(t - t_0)^2$$

Fornyet differentiation giver det tredie Taylorpolynomium o.s.v. Regningerne bliver dog normalt temmeligt besværlige ret hurtigt. Vi giver et eksempel.

Eksempel 292 *Betragt begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1$$

Differentialligningen er iøvrigt en Ricatti-ligning. Kald løsningen ϕ. *Så ses af differentialligningen, at* $\phi'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$. *Ved differentiation af differentialligningen fås*

$$\phi''(t) = 2t + 2\phi(t)\phi'(t)$$

således at $\phi''(0) = 2$. *Gentagen differentiation giver*

$$\phi'''(t) = 2 + 2\phi'(t)^2 + 2\phi(t)\phi''(t)$$

så $\phi'''(0) = 8$. *Differentiation endnu engang*

$$\phi^{(4)}(t) = 6\phi'(t)\phi''(t) + 2\phi(t)\phi'''(t)$$

så $\phi^{(4)}(0) = 28$. *Hermed har vi fundet løsningens fjerde Taylorpolynomium, som er*

$$\begin{aligned} P_4(t) &= \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2}\phi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(0)t^3 + \frac{1}{4!}\phi^{(4)}(0)t^4 \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}2t^2 + \frac{1}{3!}8t^3 + \frac{1}{4!}28t^4 = 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{6}t^4 \end{aligned}$$

Øvelse 293 *Find det tredie Taylorpolynomium for løsningen til begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = t + \cos y, \qquad y(0) = 0$$

Begge de anførte metoder til bestemmelse af approksimationer til løsningen af et givet begyndelsesværdiproblem lider under beregningsmæssige problemer. Vi skal nu betragte en helt anden type metoder. Vi indleder med en metode kaldet Eulers metode.

7.4.3 Eulers metode

Vi ønsker som ovenfor at finde en tilnærmet (med et finere ord: approksimativ) løsning af begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0$$

At dette overhovedet er interessant skyldes som nævnt, at man for mange differentialligninger ikke kan udtrykke løsningerne med det forhåndenværende repertoire af funktioner. En tilnærmet eller approksimativ løsning betegnes ofte som en **numerisk løsning**, når resultatet ikke er givet ved en formel, men foreligger som en tabel af konkrete talværdier eller som en procedure, der for enhver given konkret talværdi af t kan beregne $y(t)$. Som brugt her har ordet *numerisk* intet at gøre med brugen i udtrykket *numerisk værdi af et tal*, som i $|x|$. Eulers metode er en numerisk metode.

Eulers metode er opkaldt efter den schweitziske matematiker Leonhard Euler (1707-83), der måske er den mest produktive matematiker, der nogensinde har levet. Dette skal man dog ikke lade sig skræmme af. Metoden er ganske simpel.

Vi begynder i det opgivne punkt (t_0, y_0). Løsningens tangenthældning til $t = t_0$ er $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$. Går vi derfor et lille skridt af længden h til højre, er den nye eksakte y-værdi tæt på den y-værdi, vi får ved at gå langs tangenten. Går vi langs tangenten får vi y-værdien

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

Den tilsvarende t-værdi er

$$t_1 = t_0 + h$$

Vi står nu i punktet (t_1, y_1). Dette punkt ligger formodentlig lidt ved siden af det korrekte punkt, men er det bedste vi har. I dette punkt er løsningens hældning $y'(t_1) = f(t_1, y_1)$. Vi går langs den nye tangent et t-skridt på h, og finder da y-værdien

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

svarende til t-værdien

$$t_2 = t_1 + h$$

Således fortsættes. Vi finder en række punkter

$$(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), ..., (t_n, y_n), ...,$$

der hænger sammen på følgende måde

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

for $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Det kan vises, at den fejl, der begås ved et *enkelt* skridt er ca. proportional med h^2. Den *totale* fejl ved beregningen af $y(b)$, hvor b er sluttids-punktet, bliver hermed omtrent proportional med $h = h^1$. Derfor kaldes Eulers metode en førsteordensmetode.

Eksempel 294 *Som eksempel tager vi begyndelsesværdiproblemet*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= t^2 + y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Vi tager $h = 0.1$. *Vi har åbenbart* $t_0 = 0, y_0 = 1$ *og* $f(t, y) = t^2 + y^2$. *Så vi finder først*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1.1 \\ t_1 &= t_0 + h = 0.1 \end{aligned}$$

Dernæst finder vi

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot f(0.1, 1.1) = 1.222 \\ t_2 &= t_1 + h = 0.2 \end{aligned}$$

Gås et skridt mere, finder vi

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.222 + 0.1 \cdot f(0.2, 1.222) = 1.3753 \\ t_3 &= t_2 + h = 0.3 \end{aligned}$$

Hermed har vi tabellen

t	0	0.1	0.2	0.3
y	1	1.1	1.222	1.3753

Hvis vi halverer skridtlængden, d.v.s. tager $h = 0.05$, så fås tabellen

t	0	0.1	0.2	0.3
y	1	1.105	1.236	1.404

hvor vi kun har medtaget y-værdier svarende til samme t-værdier som før. Halveres igen ($h = 0.025$) fås:

t	0	0.1	0.2	0.3
y	1	1.1082	1.2441	1.4207

I dette eksempel kan den eksakte løsning findes, idet den kan udtrykkes ved såkaldte Besselfunktioner. Men indeholder éns repertoire af funktioner ikke Besselfunktionerne, så kan den eksakte løsning ikke angives. Maple kender Besselfunktionerne og kan finde den eksakte løsning. Den ser kompliceret ud, men løsningen giver følgende tabel (med 5 betydende cifre):

t	0	0.1	0.2	0.3
y	0	1.1115	1.2530	1.4397

Eksempel 295 *Vi prøver at anvende Eulers metode på begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = g(t), \qquad y(t_0) = 0$$

hvilket jo blot betyder bestemmelsen af $\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$, altså den stamfunktion til g, der er 0 for $t = t_0$. Vi får med $f(t, y) = g(t)$, $y_0 = 0$ og skridtstørrelse h

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = hg(t_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + hg(t_1) \\ y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = y_2 + hg(t_2) \end{aligned}$$

o.s.v. Her er $t_1 = t_0 + h, t_2 = t_1 + h$, o.s.v. Altså findes

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hg(t_2) = y_1 + hg(t_1) + hg(t_2) \\ &= hg(t_0) + hg(t_1) + hg(t_2) = h(g(t_0) + g(t_1) + g(t_2)) \end{aligned}$$

Vi ser, at metoden svarer til bestemmelse af det bestemte integral

$$\int_{t_0}^{t_n} g\,(t)\,dt$$

ved anvendelse af middelsummer, hvor der hele tiden bruges venstre intervalendepunkt. Da Eulers metode altså kun giver en ret ringe numerisk integrationsmetode, når den anvendes på dette problem, er det nærliggende at forsøge en generalisering af de andre numeriske integrationsmetoder. Dén numeriske integrationsmetode, der svarer til middelsummer, hvor midtpunktet benyttes, generaliseres til den modificerede Eulermetode, og trapezmetoden generaliseres til den såkaldte forbedrede Euler-metode eller Heun's metode. Simpsons integrationsmetode generaliseres til en fjerdeordens Runge-Kutta-metode. Vi gennemgår disse tre metoder.

7.4.4 Den modificerede Eulermetode

Vi skal finde en approksimation til løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y' = f\,(t, y)\,, \qquad y\,(t_0) = y_0$$

Sæt

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_0, y_0) \\ k_2 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) \\ y_1 &= y_0 + k_2 \\ t_1 &= t_0 + h \end{aligned}$$

Nu står vi i punktet (t_1, y_1). Herefter gentages proceduren, idet (t_0, y_0) erstattes af (t_1, y_1). Fortsæt på denne måde. Hermed fås en række punkter

$$(t_0, y_0)\,, (t_1, y_1)\,, (t_2, y_2)\,, \ldots, (t_n, y_n)\,, \ldots$$

der forventes at ligge tæt på grafen for løsningen, når blot skridtlængden h er lille. Det kan vises, at den fejl, der begås ved et enkelt skridt er ca. proportional med h^3. Den totale fejl ved beregningen af $y\,(b)$, hvor b er sluttidspunktet, bliver hermed omtrent proportional med h^2. Derfor kaldes metoden en andenordens metode. Metoden kaldes i Schaum's Mathematical Handbook for *Mid-point rule.* Maple kalder den *impoly*, en forkortelse af *improved polygon method.*

Øvelse 296 *Vis, at hvis man anvender den modificerede Eulermetode på begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = g\,(t)\,, \qquad y\,(t_0) = 0$$

så fås midtpunktsformlen for numerisk integration.

7.4.5 Heun's metode

Metoden går tilbage til K.Heun (1900) og kaldes også for den forbedrede Euler-metode. Vi skal finde en approksimation til løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

Sæt

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_0, y_0) \\ k_2 &= hf(t_0 + h, y_0 + k_1) \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ t_1 &= t_0 + h \end{aligned}$$

Nu står vi i punktet (t_1, y_1). Herefter gentages proceduren, idet (t_0, y_0) erstattes af (t_1, y_1). Fortsæt på denne måde. Hermed fås en række punkter

$$(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_n, y_n), \ldots$$

der forventes at ligge tæt på grafen for løsningen, når blot skridtlængden h er lille. Det kan vises, at den fejl, der begås ved et enkelt skridt er ca. proportional med h^3. Den totale fejl ved beregningen af $y(b)$, hvor b er sluttidspunktet, bliver hermed omtrent proportional med h^2. Derfor kaldes metoden en andenordens metode. Maple kalder denne metode *heunform* (for *Heun formula*) eller *rk2* (2. ordens Runge-Kutta).

Øvelse 297 *Vis, at hvis man anvender Heun's metode på begyndelsesværdi-problemet*

$$y' = g(t), \qquad y(t_0) = 0$$

så fås trapezformlen for numerisk integration.

7.4.6 En fjerdeordens Runge-Kutta-metode

Metoden skyldes C.Runge (1856-1927) og M.Kutta (1867-1944). Vi skal finde en approksimation til løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

Sæt

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_0, y_0) \\ k_2 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_0 + h, y_0 + k_3) \end{aligned}$$

Definér nu

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ t_1 &= t_0 + h \end{aligned}$$

Nu står vi i punktet (t_1, y_1). Herefter gentages proceduren, idet (t_0, y_0) erstattes af (t_1, y_1). Fortsæt på denne måde. Hermed fås en række punkter

$$\left(t_0, y_0\right), \left(t_1, y_1\right), \left(t_2, y_2\right), \ldots, \left(t_n, y_n\right), \ldots$$

der forventes at ligge tæt på grafen for løsningen, når blot skridtlængden h er lille. Det kan vises, at den fejl, der begås ved et enkelt skridt er ca. proportional med h^5. Den totale fejl ved beregningen af $y(b)$, hvor b er sluttidspunktet, bliver hermed omtrent proportional med h^4. Derfor kaldes metoden en fjerdeordens metode.

Øvelse 298 *Vis, at hvis man anvender den angivne Runge-Kutta-metode på begyndelsesværdiproblemet*

$$y' = g(t), \qquad y(t_0) = 0$$

så fås Simpsons formel for numerisk integration.

Vi har her nævnt 6 metoder til approksimativ løsning af førsteordens differentialligninger. Der er imidlertid mange flere. Endvidere er der alskens små forbedringer af de nævnte metoder. Eksempelvis kan det være en god idé at ændre skridtlængde afhængig af en løbende kontrol af beregningernes nøjagtighed. Denne kan kontrolleres ved en beregning af y_1 gjort både med ét skridt med en længde på h og med to skridt hver med længde $\frac{h}{2}$.

Kapitel 8

Generelle Differentialligninger af Højere Orden

En differentialligning af første orden indeholder den første afledede af den ubekendte funktion (y'), evt. denne selv (y) samt evt. den uafhængige variable (t). Vi har forudsat, at ligningen altid kunne skrives på formen $y' = f(t, y)$, altså at y' altid kunne isoleres i den ligning, der knytter y', y og t sammen. Vi vil sige, at differentialligningen er skrevet på normalform.

En differentialligning af anden orden indeholder den anden afledede (y'') af den ubekendte funktion, evt. den første afledede (y'), evt. funktionen selv (y) samt evt. den uafhængige variable (t). Vi forudsætter, at ligningen kan skrives på formen

$$y'' = f(t, y, y') \tag{*}$$

altså at y'' kan isoleres i den ligning, der knytter y'', y', y og t sammen. Vi vil igen sige, at differentialligningen er skrevet på normalform.

For en differentialligning af formen (*) findes eksistens og entydighedssætninger helt parallelle med Peano's sætning og Picard-Lindelöf's sætning for førsteordens differentialligninger. Faktisk er beviserne også helt parallelle. Grunden er den, at en højere ordens differentialligning kan skrives som et system af førsteordens differentialligninger. Vi viser dette for (*). Sæt $x_1(t) = y(t)$ og $x_2(t) = y'(t)$. Så har vi åbenbart, at $x_1$og x_2 opfylder følgende system af to førsteordens differentialligninger

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= f(t, x_1, x_2) \end{aligned}$$

Dette system kan skrives på vektorform på følgende måde. Sæt $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ og $F(t, x) = (x_2, f(t, x_1, x_2))$. Så kan systemet skrives

$$x' = F(t, x) \tag{*vektor}$$

Er der givet følgende begyndelsesbetingelser for (*): $y(t_0) = y_0$ og $y'(t_0) = p_0$, så bliver de til begyndelsesbetingelsen $x(t_0) = (y_0, p_0)$ for systemet (*vektor). Ligningen (*) med begyndelsesbetingelser har nu fået en form, der gør, at eksempelvis Picard-Lindelöf's sætning med bevis kan overtages næsten uden ændringer. Vi nøjes med at formulere følgende resultat:

Sætning 299 *Lad D være en åben delmængde af R^3. Lad f være en kontinuert funktion defineret på D, og antag, at $f(t, y, p)$ har en kontinuert afledet m.h.t. y og p i D. Lad $(t_0, y_0, p_0) \in D$. Så har begyndelsesværdiproblemet $y(t_0) = y_0$ og $y'(t_0) = p_0$, for differentialligningen $y'' = f(t, y, y')$ netop én maksimal løsning.*

Bemærkning 300 *Sætningen har naturligvis en version for differentialligninger af tredie og højere orden.*

Øvelse 301 *Omskriv differentialligningen $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \sin t$ til et system af tre førsteordens differentialligninger.*

Eksempel 302 *Betragt et matematisk pendul med masse m og længde l. Betegn med θ den vinkel, som pendulet danner med lodlinien. θ måles i radianer. Af Newtons anden lov fås*

$$m\frac{d^2(l\theta)}{d\theta^2} = -mg\sin\theta$$

hvor g betegner tyngdeaccelerationen. Heraf findes

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Lad os antage, at positionen er kendt på et tidspunkt, hvor vinkelhastigheden er nul. Vi nulstiller vores ur, så dette sker til $t = 0$. Altså $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$ er vores begyndelsesbetingelser. Af nemheds skyld sætter vi $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Vi skal dermed løse følgende begyndelsesværdiproblem

$$\theta'' = -k^2\sin\theta, \qquad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0 \tag{(**)}$$

Dette problem behandles i elementære fremstillinger (som denne) oftest ved en indskrænkning til små udsving af pendulet. Når nemlig θ er lille numerisk set, så er forskellen mellem $\sin\theta$ og θ ubetydelig (forhåbentlig). Begyndelsesværdiproblemet (**) erstattes dermed af følgende begyndelsesværdiproblem:

$$\theta'' = -k^2\theta, \qquad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0 \tag{(**lin)}$$

Dette problem er f.eks. løst i gymnasielærebøger (se også senere). Løsningen er $\theta(t) = \theta_0\cos(kt)$. Hvis denne approksimation er tilladelig, ses at pendulbevægelsen bliver periodisk med periode $T_0 = \frac{2\pi}{k}$.

Vi skal nu vise, hvordan man ved et simpelt trick, kan forvandle (**) til et begyndelsesværdiproblem for en førsteordens differentialligning. Multiplicéres differentialligningen i (**) med $2\theta'$ fås

$$2\theta'\theta'' = -2k^2\theta'\sin\theta$$

Denne ligning er åbenbart ækvivalent med (**) på ethvert interval, hvor $\theta' \neq 0$*. Da venstre side i ligningen er lig med* $\frac{d}{dt}\left(\theta'^2\right)$ *og højre side er lig med* $\frac{d}{dt}\left(2k^2\cos\theta\right)$*, fås dermed*

$$\theta'^2 = 2k^2\cos\theta + C$$

hvor konstanten C *bestemmes af begyndelsesbetingelserne* $\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$*, til* $C = -2k^2\cos\theta_0$*. Altså fås*

$$\theta'^2 = 2k^2\cos\theta - 2k^2\cos\theta_0 \qquad (***)$$

Denne ligning udtrykker, at den totale mekaniske energi er bevaret under bevægelsen. Den totale mekaniske energi er nemlig summen af den kinetiske energi $\frac{1}{2}m\left(l\theta'\right)^2$ *og den potentielle energi, som er* $mgl(\cos\theta - 1)$*, når den sættes til 0 i den lodrette position for pendulet. Differentialligningen (***) er ikke på normalform. Bemærk først, at det følger af (***), at* $\cos\theta - \cos\theta_0 \geq 0$*, hvilket fysisk set blot betyder, at pendulet ikke kommer højere op end svarende til udgangspositionen. Af (***) fås så*

$$\theta' = \pm k\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\theta_0} \qquad ((***\text{n}))$$

altså to udtryk i stedet for ét. Vi må imidlertid forvente, at skulle skifte mellem de to: Hvis $\theta'(t) > 0$*, når pendulet svinger den ene vej, må* $\theta'(t) < 0$*, når det svinger tilbage. Vi betragter pendulet fra en start med* $\theta(0) = \theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$*. Så følger af (**), at* $\theta''(0) = -k^2\sin\theta_0 > 0$*. Da* $\theta'(0) = 0$*, fås at* $\theta'(t) > 0$ *på et interval* $I_1 =]0, t_1[$*. På dette interval skal vi altså bruge fortegnet '+' i (***n). Vi har altså nu begyndelsesværdiproblemet*

$$\theta' = k\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\theta_0}, \qquad \theta(0) = \theta_0$$

Dette begyndelsesværdiproblemet har en konstant løsning, nemlig $\theta(t) = \theta_0$ *for alle* t*. Men som vi lige har set, er denne løsning ikke løsning til (**). Husk, at ligningerne (**) og (***) kun er ækvivalente på intervaller, hvor* $\theta' \neq 0$*. Vores nye begyndelsesværdiproblem har heldigvis også andre løsninger. Differentialligningen er separabel. Ved separation med påfølgende integration over tiden fra 0 til t fås*

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\phi}{\sqrt{2\cos\phi - 2\cos\theta_0}} = kt$$

Nu begynder det at blive svært! Vi vil jo gerne udtrykke $\theta(t)$ *ved* t*. Her får vi imidlertid brug for kendskab til elliptiske integraler, så vi nøjes med at give en formel for pendulets svingningstid* T*. Vinklen* $\theta = 0$ *svarer nemlig til tiden* $\frac{1}{4}T$*. Altså har vi, idet vi erindrer, at* $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$*:*

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta_0}^{0} \frac{d\phi}{\sqrt{2\cos\phi - 2\cos\theta_0}}$$

Integralet kan udregnes numerisk. Det kan også omskrives til et fuldstændigt elliptisk integral af første art, således

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - m\sin^2 u}}$$

hvor $m = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$. *Denne version har den fordel, at den er velstuderet, se f.eks. Schaum under Elliptic Functions, Complete Elliptic Integral of the First Kind.*

I eksempel ovenfor er brugt et trick, der med fordel kan bruges på andenordens differentialligninger af typen

$$y'' = g(y)$$

Idéen er som vist i eksemplet den, at multiplicere ligningen med $2y'(t)$, hvorefter venstre side er $\frac{d}{dt}\left(y'(t)^2\right)$ og højre side er $2\frac{d}{dt}G(y(t))$, når G er en stamfunktion til g. Hermed har vi fået et såkaldt første integral til $y'' = g(y)$, nemlig fundet, at

$$y'(t)^2 - 2G(y) = C$$

hvor C er en arbitrær konstant.

Øvelse 303 *Find løsningen til begyndelsesværdiproblemet*

$$y'' = 2y^3 + 2y, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

En anden klasse af andenordens differentialligninger, der kan løses ved reduktion til en førsteordensligning er følgende type

$$y'' = g(t, y')$$

Det bemærkelsesværdige er, at den ubekendte funktion y kun er repræsenteret ved sine afledede y' og y''. Løsningsmetoden er simpel: Sæt $x(t) = y'(t)$, så fås $x' = g(t, x)$, der jo er en førsteordensdifferentialligning. Når $x(t)$ er bestemt, kan $y(t)$ derefter bestemmes som en stamfunktion til $x(t)$.

Eksempel 304 *Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$y'' = (y')^2 + 1$$

Sæt $x = y'$, *så fås* $x' = x^2 + 1$, *der kan separeres. Vi finder* $\arctan x = t + c_1$, *hvor* c_1 *er en vilkårlig konstant. Altså* $x(t) = \tan(t + c_1)$. *Heraf findes ved ubestemt integration* $y(t) = -\ln|\cos(t + c_1)| + c_2$, *hvor* c_1 *og* c_2 *er vilkårlige konstanter. De maksimale løsningers definitionsintervaller er begrænset af to på hinanden følgende nulpunkter for* $\cos(t + c_1)$.

8.1 Numerisk løsning af højere ordens differentialligninger

Begyndelsesværdiproblemet

$$y'' = f(t, y, y'), \qquad y(t_0) = y_0, y'(t_0) = p_0$$

løses numerisk ved den omskrivning til et system af to førsteordens differentialligninger, som tidligere er beskrevet. Vi skal beskrive en Runge-Kutta-metode af fjerde orden for et system af to førsteordensdifferentialligninger. Den er en umiddelbar generalisation af den tilsvarende metode for én førsteordens differentialligning, og den udvides let til n første ordens systemer med n ubekendte funktioner.

Vi skal finde en approksimation til løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x,y) \\ y' &= g(t,x,y) \end{aligned}$$

med $x(t_0) = x_0$ og $y(t_0) = y_0$. Sæt

$$\begin{array}{cc} k_1 = hf(t_0,x_0,y_0) & l_1 = hg(t_0,x_0,y_0) \\ k_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1\right) & l_2 = hg\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1\right) \\ k_3 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2\right) & l_3 = hg\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2\right) \\ k_4 = hf(t_0 + h, x_0 + k_3, y_0 + l_3) & l_4 = hg(t_0 + h, x_0 + k_3, y_0 + l_3) \end{array}$$

Definér nu

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ t_1 &= t_0 + h \end{aligned}$$

Nu står vi i punktet (t_1, x_1, y_1). Herefter gentages proceduren, idet (t_0, x_0, y_0) erstattes af (t_1, x_1, y_1). Fortsæt på denne måde. Hermed fås en række punkter $(t_0,x_0,y_0), (t_1,x_1,y_1), (t_2,x_2,y_2), \ldots, (t_n,x_n,y_n), \ldots$, der forventes at ligge tæt på banekurven for løsningen, når blot skridtlængden h er lille. Det kan vises, at den fejl, der begås ved et enkelt skridt er ca. proportional med h^5. Den totale fejl ved beregningen af $(x(b), y(b))$, hvor b er sluttidspunktet, bliver hermed omtrent proportional med h^4. Derfor kaldes metoden en fjerdeordens metode.

8.2 Randværdiproblemer

For differentialligninger af første orden optræder der normalt ved bestemmelse af den fuldstændige løsning én arbitrær konstant. Svarende hertil vil løsningen normalt være entydigt bestemt ved én begyndelsesbetingelse. For differentialligninger af anden orden har vi ovenfor set, at man må stille begyndelsesbetingelser både for funktionen og dens første afledede. Man kommer imidlertid ud for situationer, hvor det er mere naturligt, at stille betingelser for den ubekendte funktions værdier i de to endepunkter for et vist interval, eller for værdierne for den ubekendte funktions afledede. Man taler om et randværdiproblem for differentialligningen. Vi giver kun et meget simpelt eksempel, men det viser, at der er en afgørende forskel mellem randværdiproblemer og begyndelsesværdiproblemer.

Eksempel 305 *Betragt differentialligningen*

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{*}$$

hvor $\lambda \in R$. *Vi vil finde samtlige løsninger til (*), der også opfylder randværdibetingelserne*

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Vi inddeler undersøgelsen i tre dele.

1. $\lambda < 0$. *Vi sætter* $k = \sqrt{-\lambda}$. *Den fuldstændige løsning til (*) er givet ved* $y(t) = a^{-kt} + be^{kt}$, *hvor* $a, b \in R$. *Indsættes* $t = 0$ *og* $t = \pi$, *fås ligningssystemet* $a + b = 0$ *og* $ae^{-k\pi} + be^{k\pi} = 0$, *hvis eneste løsning er* $a = b = 0$. *Altså har (*) med randværdierne* $y(0) = 0$ *og* $y(\pi) = 0$ *kun den trivielle løsning, nulløsningen.*

2. $\lambda = 0$. *Den fuldstændige løsning til (*) er givet ved* $y(t) = at + b$, *hvor* $a, b \in R$. *Indsættes* $t = 0$ *og* $t = \pi$, *fås*$a = b = 0$. *Som i tilfælde 1 har randværdiproblemet kun nulløsningen.*

3. $\lambda > 0$. *Vi sætter* $k = \sqrt{\lambda}$. *Den fuldstændige løsning til (*) er givet ved* $y(t) = a\cos kt + b\sin kt$, *hvor* $a, b \in R$. *Indsættes* $t = 0$, *fås* $a = 0$. *Indsættes* $t = \pi$, *fås* $b\sin k\pi = 0$. *Hvis* $\sin k\pi \neq 0$, *har randværdiproblemet kun nulløsningen ligesom i tilfælde 1 og 2. Men hvis* $\sin k\pi = 0$, *d.v.s. hvis* $\lambda = k^2$ *for et* $k \in N$, *ser vi, at randværdiproblemet har følgende løsninger*

$$y(t) = b\sin kt, \qquad b \in R$$

Øvelse 306 *Løs for ethvert* $\lambda \in R$ *følgende randværdiproblem for differentialligningen (*):*

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ y'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

I modsætning til randværdiproblemerne i eksemplet og i øvelsen ovenfor har begyndelsesværdiproblemet for (*) med $y(0) = y'(0) = 0$ kun den trivielle løsning, nulløsningen, og det uanset værdien af λ i (*).

Randværdiproblemer for ordinære differentialligninger som (*) optræder ved løsningen af randværdiproblemer for partielle differentialligninger, f.eks. ved løsningen af varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

hvor $u = u(x, t)$ betegner temperaturen i punktet x på en stang til tiden t, og hvor k er en positiv konstant, der afhænger af det materiale stangen er lavet af.

Hvis enderne af stangen ($x = 0$ og $x = L$) holdes på temperaturen 0 for alle $t \geq 0$, har vi randværdibetingelserne $u(0,t) = 0$ og $u(L,t) = 0$ alle $t \geq 0$.

Bølgeligningen er et andet eksempel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Her betegner $u = u(x,t)$ udsvinget i punktet x af en svingende streng til tiden t. Igen er k er en positiv konstant. Strengens endepunkter tænkes fastgjort, hvormed vi har randværdibetingelserne $u(0,t) = u(L,t) = 0$ for alle $t \geq 0$.

Randværdiproblemet for disse partielle differentialligninger bliver ved ansatsen $u(x,t) = w(x)\,v(t)$ til et randværdiproblem for den ordinære differentialligning $w'' + \lambda w = 0$, der blev behandlet ovenfor.

Kapitel 9

Lineære Differentialligninger af 2. Orden

Sætning 307 ***Eksistens- og entydighedssætning for lineære differentialligninger.*** *Betragt en differentialligning af formen*

$$a\,(t)\,y'' + b\,(t)\,y' + c\,(t)\,y = q\,(t) \tag{*}$$

hvor vi antager, at koefficienterne a, b, c, samt højresiden q er kontinuerte funktioner defineret på et interval I. Antag, at den ledende koefficient a er forskellig fra nul på hele intervallet I. Betragt også følgende begyndelsesbetingelser

$$y\,(t_0) = y_0, y'\,(t_0) = y_1$$

hvor $t_0 \in I$. Så har begyndelsesværdiproblemet bestående af differentialligningen og begyndelsesbetingelserne præcis én maksimal løsning, og denne er defineret på hele intervallet I.

Vi giver ikke noget bevis for sætningen, men vi benytter den i stort omfang i det følgende.

9.1 Homogene Lineære differentialligninger

Ved en homogen lineær differentialligning forstås en lineær differentialligning, i hvilken højresiden $q(t)$ i ligning (*) er nul for alle $t \in I$, altså ser ud som følger:

$$a\,(t)\,y'' + b\,(t)\,y' + c\,(t)\,y = 0 \tag{*hom}$$

hvor vi igen antager, at koefficientfunktionerne a, b, og c er kontinuerte på intervallet I, og hvor den ledende koefficient $a\,(t)$ ikke er nul for noget $t \in I$.

Sætning 308 *Lad ϕ_1 og ϕ_2 være løsninger til den homogene ligning (*hom) på intervallet I, og lad c_1 og c_2 være konstanter. Så er linearkombinationen*

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$$

*også en løsning til (*hom) på I.*

Bevis. *Da ϕ_1 og ϕ_2 er løsninger, har vi for alle $t \in I$,*

$$\begin{aligned} a(t)\phi_1''(t) + b(t)\phi_1'(t) + c(t)\phi_1(t) &= 0 \\ a(t)\phi_2''(t) + b(t)\phi_2'(t) + c(t)\phi_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Udnyttes, at $\phi'(t) = c_1\phi_1'(t) + c_2\phi_2'(t)$, og at $\phi''(t) = c_1\phi_1''(t) + c_2\phi_2''(t)$, så fås

$$\begin{aligned} & a(t)\phi''(t) + b(t)\phi'(t) + c(t)\phi(t) \\ = \; & a(t)\left(c_1\phi_1''(t) + c_2\phi_2''(t)\right) + b(t)\left(c_1\phi_1'(t) + c_2\phi_2'(t)\right) + c(t)\left(c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)\right) \\ = \; & c_1\left(a(t)\phi_1''(t) + b(t)\phi_1'(t) + c(t)\phi_1(t)\right) + c_2\left(a(t)\phi_2''(t) + b(t)\phi_2'(t) + c(t)\phi_2(t)\right) \\ = \; & c_1 0 + c_2 0 = 0 \end{aligned}$$

*hvilket jo betyder, at ϕ er løsning til (*hom).* ■

Definition 309 *Ved Wronski-determinanten for to differentiable funktioner f og g defineret på et interval I, forstås determinanten*

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

Wronskideterminanten er åbenbart en funktion defineret på I.

Sætning 310 *Betragt den homogene lineære differentialligning*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

Antag, at koefficienterne a, b, c er kontinuerte funktioner defineret på et interval I. Antag, at den ledende koefficient a er forskellig fra nul på hele intervallet I. Lad ϕ_1 og ϕ_2 være løsninger. Så gælder, at Wronski-determinanten $W(t)$ for løsningerne ϕ_1 og ϕ_2 opfylder differentialligningen

$$a(t)W'(t) + b(t)W(t) = 0$$

på intervallet I . W er altså givet ved

$$W(t) = K\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{b(s)}{a(s)}ds\right)$$

hvor t_0 kan vælges vilkårligt i I og K er en konstant (der afhænger af valget af t_0).

Bemærkning 311 *Formlen for Wronskideterminanten kaldes Abels identitet og skyldes nordmanden Niels Henrik Abel, 1802-1829.*

Korollar 312 *Wronski-determinanten for løsningerne er enten identisk lig med nul i I eller aldrig lig med nul i I.*

Sætning 313 *Betragt den homogene lineære differentialligning*

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = 0$$

på intervallet I og antag, at koefficienterne a, b, c er kontinuerte funktioner på I med $a(t) \neq 0$ for alle $t \in I$. Så gælder:

1. *Der findes to løsninger, hvis Wronskideterminant er forskellig fra nul på I.*

2. *Hvis ϕ_1 og ϕ_2 er løsninger, hvis Wronskideterminant er forskellig fra nul på I, så kan enhver anden løsning ϕ skrives som en linearkombination af løsningerne ϕ_1 og ϕ_2, d.v.s. $\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$ for alle $t \in I$ for passende valg af konstanterne c_1 og c_2.*

Bevis.

1. *Lad $t_0 \in I$ være et punkt, som vi holder fast i det følgende. Lad $\phi_1$være den løsning til den homogene differentialligning (*hom) (med $n = 2$), der opfylder begyndelsesbetingelserne $\phi_1(t_0) = 1$ og $\phi_1'(t_0) = 0$. Lad $\phi_2$være den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $\phi_2(t_0) = 0$ og $\phi_2'(t_0) = 1$. Sådanne to løsninger findes iflg. eksistens- og entydighedssætningen. Vi viser, at de to løsninger har Wronski-determinant W forskellig fra nul på I. For $t = t_0$ er*

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_2(t_0) \\ \phi_1'(t_0) & \phi_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

   Hermed er første del vist.

2. *For at vise anden del antager vi, at ϕ_1 og ϕ_2 er løsninger med Wronskideterminant forskellig fra nul. Lad ϕ være en tredie løsning til (*hom). Vi skal vise, at ϕ kan skrives som en linearkombination af ϕ_1 og ϕ_2. Betragt ligningssystemet*

$$\begin{aligned} c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) &= \phi(t_0) \\ c_1\phi_1'(t_0) + c_2\phi_2'(t_0) &= \phi'(t_0) \end{aligned}$$

   *hvor de ubekendte er (c_1, c_2). Ligningssystemets determinant er jo Wronskideterminanten. Da denne er forskellig fra nul, har systemet præcis én løsning. Lad (c_1, c_2) være denne løsning. Vi viser, at funktionen f givet ved $f(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$ for alle $t \in I$, faktisk er lig med ϕ. Vi har nemlig, at $f(t_0) = \phi(t_0)$ og $f'(t_0) = \phi'(t_0)$. D.v.s. at f og ϕ, der jo begge er løsninger til (*hom), opfylder de samme begyndelsesbetingelser i t_0, men så er de iflg. eksistens- og entydighedssætningen identiske. Hermed er anden del af sætningen vist.*

■

Eksempel 314 *Vi vil finde den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0$$

på intervallet $]0, \infty[$, *idet det opgives, at to løsninger er* t^{-1} *og* $t^{-1}\ln t$. *Vi overlader til læseren at verificere ved indsættelse , at de to funktioner faktisk er løsninger til den givne homogene lineære differentialligning af anden orden. Vi finder deres Wronski-determinant til*

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^{-1} & t^{-1}\ln t \\ -t^{-2} & t^{-2}(1 - \ln t) \end{vmatrix} = t^{-3}$$

der jo ikke er nul på det betragtede interval. Altså er den fuldstændige løsning til differentialligningen givet ved $y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1}\ln t$, *hvor* c_1 *og* c_2 *er arbitrære konstanter og* $t > 0$.

Øvelse 315 *Find den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$$

for $t > 0$, *idet det oplyses, at* t *og* te^t *er løsninger (eftervis iøvrigt først det!).*

Vi viser nu en sætning, som vi får brug for ved løsning af homogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter.

Sætning 316 *Betragt igen den homogene differentialligning (*hom). Antag, at koefficienterne er reelle. Så gælder, at hvis* ϕ *er en kompleks løsning til (*hom), så er både* $\operatorname{Re}\phi$ *og* $\operatorname{Im}\phi$ *løsninger til samme ligning.*

Bevis. *Da* ϕ *er løsning har vi*

$$a(t)\phi''(t) + b(t)\phi'(t) + c(t)\phi(t) = 0$$

for alle $t \in I$. *Kompleks konjugér denne ligning. Så fås, da koefficienterne er reelle, at*

$$a(t)\overline{\phi''(t)} + b(t)\overline{\phi'(t)} + c(t)\overline{\phi(t)} = 0$$

Husk, at den kompleks konjugerede af en sum (produkt) er summen (produktet) af de kompleks konjugerede. Men hvis $\phi(t) = u(t) + iv(t)$, *så har vi* $\phi'(t) = u'(t) + iv'(t)$. *Derfor har vi også følgende*

$$a(t)\overline{\phi}'(t) + b(t)\overline{\phi}'(t) + c(t)\overline{\phi}(t) = 0$$

Konklusionen er, at den kompleks konjugerede til ϕ, *altså* $\overline{\phi}$, *også er løsning til (*hom). Men* $\operatorname{Re}\phi = \frac{1}{2}\left(\phi + \overline{\phi}\right)$ *og* $\operatorname{Im}\phi = \frac{1}{2i}\left(\phi - \overline{\phi}\right)$, *så iflg. Sætning 8.2 er* $\operatorname{Re}\phi$ *og* $\operatorname{Im}\phi$ *løsninger til (*hom).* ■

Eksempel 317 *Differentialligningen*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

har den komplekse løsning $\phi(t) = e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t)$. *Dermed er både* $e^{-t}\cos 2t$ *og* $e^{-t}\sin 2t$ *løsninger til differentialligningen, idet denne jo har reelle koefficienter. Vi udregner Wronski-determinanten for disse to reelle løsninger og får*

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t) & e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t) \end{vmatrix} = 2e^{-2t}$$

Da dette er forskelligt fra nul, er den fuldstændige løsning til differentialligningen dermed givet ved

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\sin 2t$$

hvor c_1 *og* c_2 *er vilkårlige reelle konstanter. Reelle konstanter som sagt, hvis det er underforstået, at vi kun accepterer reelle løsninger i facit. Dette er normalt tilfældet, og det bør man regne med, med mindre naturligvis, at den givne differentialligning har ikke-reelle koefficienter.*

9.2 Den inhomogene lineære ligning

Vi vender nu tilbage til den generelle lineære differentialligning

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = q(t) \tag{*}$$

Der gælder følgende simple, men vigtige resultat.

Sætning 318 *1. Lad* ψ_1 *og* ψ_2 *begge være løsninger til den inhomogene ligning (*). Så er* $\phi = \psi_1 - \psi_2$ *en løsning til den tilsvarende homogene ligning*

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{*hom}$$

2. *Lad* ψ_1 *være en løsning til den inhomogene ligning (*) og* ϕ *en løsning til den tilsvarende homogene ligning (*hom). Så er* $\psi_2 = \psi_1 + \phi$ *en løsning til den inhomogene ligning (*).*

Bevis.

1. *Vi har givet, at*

$$\begin{aligned} a(t)\psi_1'' + b(t)\psi_1' + c(t)\psi_1 &= q(t) \\ a(t)\psi_2'' + b(t)\psi_2' + c(t)\psi_2 &= q(t) \end{aligned}$$

Trækkes den nederste ligning fra den øverste fås

$$a(t)\left(\psi_1'' - \psi_2''\right) + b(t)\left(\psi_1' - \psi_2'\right) + c(t)(\psi_1 - \psi_2) = q(t) - q(t) = 0$$

altså

$$a(t)\phi'' + b(t)\phi' + c(t)\phi = 0$$

hvilket vi skulle vise.

2. *Vi har givet at*

$$\begin{aligned} a(t)\,\psi_1'' + b(t)\,\psi_1' + c(t)\,\psi_1 &= q(t) \\ a(t)\,\phi'' + b(t)\,\phi' + c(t)\,\phi &= 0 \end{aligned}$$

Heraf følger ved addition af de to ligninger

$$\begin{aligned} q(t) &= q(t) + 0 = \left(a(t)\,\psi_1'' + b(t)\,\psi_1' + c(t)\,\psi_1\right) + \left(a(t)\,\phi'' + b(t)\,\phi' + c(t)\,\phi\right) \\ &= a(t)\left(\psi_1'' + \phi''\right) + b(t)\left(\psi_1' + \phi'\right) + c(t)\left(\psi_1 + \phi\right) \\ &= a(t)\,\psi_2'' + b(t)\,\psi_2' + c(t)\,\psi_2 \end{aligned}$$

som vi jo skulle vise.

■

På basis af denne sætning kan vi nu give en opskrift på bestemmelsen af den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning (*).

1. Find den fuldstændige løsning til den homogene ligning (*hom). Denne løsning vil indeholde to arbitrære konstanter og er normalt skrevet som en linearkombination af to specielle løsninger til (*hom).
2. Find bare én løsning til den inhomogene ligning (*). En sådan løsning kaldes en partikulær løsning til (*).
3. Opskriv den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning (*) som summen af den fundne partikulære løsning til (*) og den fuldstændige løsning til den homogene ligning (*hom).

Eksempel 319 *Vi bestemte i eksemplet ovenfor den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0$$

for $t > 0$*. Vi fandt den til*

$$y(t) = c_1t^{-1} + c_2t^{-1}\ln t$$

$c_1, c_2 \in R$*. Betragt nu for* $t > 0$ *differentialligningen*

$$t^2y'' + 3ty' + y = 18t^2 + 1$$

Det er ikke urimeligt at gætte på, at et andengradspolynomium løser ligningen. Prøver man sig frem, viser det sig, at funktionen $y_p(t) = 2t^2 + 1$ *er en (partikulær) løsning. Hermed er den fuldstændige løsning givet ved*

$$y(t) = 2t^2 + 1 + c_1t^{-1} + c_2t^{-1}\ln t$$

hvor $c_1, c_2 \in R$ *er arbitrære konstanter, og hvor definitionsintervallet er* R_+*.*

Kapitel 10

Lineære Differentialligninger med Konstante Koefficienter

10.1 Homogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter

Betragt nu differentialligningen

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{*}$$

hvor koefficienterne er konstanter (normalt reelle), og hvor $a \neq 0$. Vi indfører en bekvem betegnelse for differentiationsoperatoren $\frac{d}{dt}$. Vi vil skrive D i stedet for $\frac{d}{dt}$ og D^2 for $\frac{d^2}{dt^2}$. Dermed erstattes f.eks. $\frac{df}{dt}$ af Df. Hermed kan differentialligningen formuleres således

$$aD^2y + bDy + cy = 0$$

og endda også således

$$\left(aD^2 + bD + c\right) y = 0$$

hvor differentialoperatoren $aD^2 + bD + c$ anvendes på den ubekendte funktion y. Definér nu karakterpolynomiet p svarende til differentialligningen som polynomiet

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Det benævnes undertiden også det karakteristiske polynomium. Nu kan differentialligningen skrives meget kort på følgende måde: Indsæt operatoren D i polynomiet p på den variables plads, hermed fås ligningen $p(D)\, y = 0$. Her må man erindre sig, at $p(D)$ er en differentialoperator, den skal altså stå til venstre for y.

Vi vil nu finde den fuldstændige løsning til differentialligningen $p(D)\,y = 0$, altså til den givne differentialligning. Bemærk, at for alle $\lambda \in C$ (ikke kun reelle λ), gælder

$$\begin{aligned} De^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \\ D^2e^{\lambda t} &= D\left(De^{\lambda t}\right) = D\left(\lambda e^{\lambda t}\right) = \lambda De^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Generelt findes $D^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Hermed har vi også følgende meget smukke resultat:

$$p(D)\,e^{\lambda t} = p(\lambda)\,e^{\lambda t}$$

for alle $t \in R$. Af denne formel fremgår, at

$$p(D)\,e^{\lambda t} = 0 \Longleftrightarrow p(\lambda)\,e^{\lambda t} = 0$$

Da $e^{\lambda t} \neq 0$ for alle værdier af t og λ, ser vi altså, at $y = e^{\lambda t}$ er løsning til differentialligningen (*), hvis og kun hvis λ er rod i karakterpolynomiet, altså hvis og kun hvis $p(\lambda) = 0$. Ligningen $p(\lambda) = 0$ kaldes karakterligningen.

Eksempel 320 *Betragt differentialligningen*

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

eller med operatorformuleringen:

$$\left(D^2 + 3D + 2\right) y = 0$$

Karakterpolynomiet er altså $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, *der har rødderne* -2 *og* -1. *Hermed er* e^{-2t} *og* e^{-t} *løsninger. Disse to løsninger har Wronskideterminanten*

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t}$$

der er forskellig fra nul. Derfor er den fuldstændige løsning til differentialligningen givet ved

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

$c_1, c_2 \in R, t \in R$.

Den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ *og* $y'(0) = -3$, *findes således: Vi har*

$$1 = y(0) = c_1 + c_2$$

og da $y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$ *har vi også*

$$-3 = y'(0) = -2c_1 - c_2$$

Ved addering af disse to ligninger med de to ubekendte c_1 *og* c_2 *fås* $-c_1 = -2$, *altså* $c_1 = 2$. *Herefter findes* $c_2 = -1$. *Den søgte løsning er da*

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$$

Eksempel 321 *Betragt differentialligningen*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$*, der har rødderne* $-1 \pm 2i$*. D.v.s. at vi har de komplekse løsninger* $e^{(-1+2i)t}$ *og* $e^{(-1-2i)t}$*. Vi så i forrige afsnit, at vi udfra den første af disse komplekse løsninger kan finde den fuldstændige reelle løsning. Den anden af vore to komplekse løsninger kunne vi behandle på samme måde, men vi får intet nyt frem, idet vi jo allerede har den fuldstændige løsning. Vi fandt den fuldstændige løsning til*

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t$$

$c_1, c_2 \in R, t \in R.$

For en andenordens homogen lineær differentialligning med konstante og reelle koefficienter (det var en lang mundfuld!) har vi i disse to eksempler set hovedtilfældene, idet et polynomium af anden grad med reelle koefficienter enten har to forskellige reelle rødder eller to imaginære rødder, der er hinandens kompleks konjugerede, eller lidt specielt: én reel dobbeltrod.

Sætning 322 *Betragt differentialligningen*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

hvor koefficienterne er reelle konstanter, og hvor $a \neq 0$*.*

1. *Hvis karakterpolynomiet har to (forskellige) reelle rødder* λ_1 *og* λ_2*, er den fuldstændige løsning givet ved*

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R, t \in R.$

2. *Hvis karakterpolynomiet har to ikke-reelle rødder,* $\lambda = \mu \pm i\nu$*, med* $\nu \neq 0$*, er den fuldstændige løsning givet ved*

$$y(t) = c_1 e^{\mu t} \cos \nu t + c_2 e^{\mu t} \sin \nu t$$

hvor $c_1, c_2 \in R, t \in R.$

3. *Hvis karakterpolynomiet har en reel dobbeltrod* λ*, er den fuldstændige løsning givet ved*

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R, t \in R.$

Bevis. Beviset for de to første påstande går lige som i eksemplerne ovenfor og overspringes derfor. Vi betragter dobbeltrodstilfældet. Lad λ være dobbeltrod i karakterpolynomiet $a\lambda^2 + b\lambda + c$. Vi skal først vise, at $y = te^{\lambda t}$ er løsning. Vi findet $y' = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}, y'' = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}$. Ved indsættelse fås

$$\begin{aligned} & a\left(2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}\right) + b\left(e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}\right) + cte^{\lambda t} \\ = \; & te^{\lambda t}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + e^{\lambda t}\left(2\lambda a + b\right) \end{aligned}$$

Men $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ fordi λ er rod, og $2\lambda a + b = 0$ fordi λ er dobbeltrod. Altså er $y = te^{\lambda t}$ løsning. Løsningerne $e^{\lambda t}$ og $te^{\lambda t}$ har Wronskideterminant givet ved

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda t}$$

der jo er forskellig fra nul. Derfor er den fuldstændige løsning givet ved $y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}$ hvor $c_1, c_2 \in R, t \in R$. ∎

Eksempel 323 *Betragt differentialligningen*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$. *Det har altså dobbeltroden* -2. *Den fuldstændige løsning er derfor*

$$y(t) = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R, t \in R$.

Bemærkning 324 *Idéen med i dobbeltrodstilfældet at gange et t på den allerede fundne løsning* $e^{\lambda t}$ *kommer ikke ud af den blå luft. Betragt igen differentialligningen*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

med karakterpolynomium $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, *med dobbeltroden* -2. *Vi har altså ihvertfald fundet én løsning, nemlig* e^{-2t}.

Eksempel 325 *Ligningen kan skrives* $(D+2)^2 y = 0$. *Vi sætter* $z = (D+2)y$, *og får så, at* z *opfylder* $(D+2)z = 0$ *altså* $z' + 2z = 0$. *Denne første ordens lineære differentialligning kan vi let løse, vi finder* $z(t) = c_1 e^{-2t}$, *hvor* c_1 *er en vilkårlig konstant. Vi skal dernæst løse en ny lineær 1. ordens differentialligning, nemlig* $(D+2)y = z = c_1 e^{-2t}$, *altså* $y' + 2y = c_1 e^{-2t}$. *Ved hjælp af Panserformlen fås*

$$y(t) = e^{-2t} \int e^{2t} c_1 e^{-2t} dt + c_2 e^{-2t} = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}$$

hvor også c_2 *er en vilkårlig konstant. De to løsninger* e^{-2t} *og* te^{-2t} *har Wronskideterminant*

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix} = e^{-4t}$$

der er forskellig fra nul. altså ses det, at $y(t) = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in R, t \in R$, *faktisk er den fuldstændige løsning til den oprindelige differentialligning.*

Øvelse 326 *Løs hver af følgende homogene differentialligninger*

1. $y'' - 2y' - 63y = 0$
2. $y'' + 6y' + 25y = 0$
3. $4y'' + 4y' + y = 0$

Vi har nu set eksempler på de tre forskellige tilfælde, der optræder ved løsning af en homogen ligning af anden orden. Hermed har vi løftet fligen for følgende generelle sætning.

Sætning 327 *Betragt den homogene differentialligning*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

med konstante, reelle koefficienter.

1. *Hvis λ er en reel rod i karakterpolynomiet og har multiplicitet k, så er*

   $$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

   hver for sig løsning til (*).

2. *Hvis $\lambda = \mu + i\nu$ (hvor $\mu, \nu \in R$, $\nu \neq 0$) er rod i karakterpolynomiet med multiplicitet k, så er*

   $$\begin{aligned}&e^{\mu t}\cos\nu t, e^{\mu t}\sin\nu t, te^{\mu t}\cos\nu t, te^{\mu t}\sin\nu t,\\&t^2 e^{\mu t}\cos\nu t, t^2 e^{\mu t}\sin\nu t, \ldots, t^{k-1}e^{\mu t}\cos\nu t, t^{k-1}e^{\mu t}\sin\nu t\end{aligned}$$

   hver for sig løsning til (*).

3. *Den fuldstændige løsning til (*) er linearkombinationen af det sæt af ialt n løsninger, der fremkommer ved anvendelsen af (1) og (2) ovenfor på samtlige reelle rødder og samtlige ikke-relle rødder med positiv imaginærdel.*

Bevis. *Udelades.* ■

Øvelse 328 *Løs følgende differentialligninger:*

1. $y''' + 8y = 0$
2. $y^{(6)} + 16y''' + 64y = 0$

Af hensyn til senere gør vi her opmærksom på, hvilke funktioner det er, der kan være løsninger til en homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter. Af referencehensyn formulerer vi det i en sætning.

Sætning 329 *En funktion f er løsning til en (eller anden) homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter, hvis og kun hvis f har formen*

$$f(t) = t^m e^{\alpha t} \begin{cases} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{cases}$$

eller, hvis f er en linearkombination af sådanne led. Her er m et helt ikke-negativt tal, α og β er reelle tal. Når $\beta = 0$ har vi $f(t) = t^m e^{\alpha t}$, idet cosinus-faktoren giver 1. Hvis $\beta = 0$, så er f løsning til differentialligningen $(D - \alpha)^{m+1} y = 0$ (differentialligning af $(m+1)$'te orden). Hvis $\beta \neq 0$, så er f løsning til differentialligningen $\left((D-\alpha)^2 + \beta^2\right)^{m+1} y = 0$ (differentialligning af $(2m+2)$'te orden med reelle koefficienter).

Definition 330 *Hvis f er en linearkombination af funktioner af typen ovenfor, og hvis $p(D)$ er en differentialoperator med konstante koefficienter, således at $p(D) f = 0$, så vil vi kalde $p(D)$ en annihilerende operator for f.*

Vi ser af definitionen og af sætningen, at $(D - \alpha)^{m+1}$ er en annihilerende operator for funktionen $t^m e^{\alpha t}$. Endvidere er $\left((D-\alpha)^2 + \beta^2\right)^{m+1}$ en annihilerende operator for $t^m e^{\alpha t} \cos \beta t$. (Vi bemærker, at også $(D - (\alpha + i\beta))^{m+1}$ er en annihilerende operator for denne funktion, men den har ikke reelle koefficienter).

Eksempel 331 *En annihilerende operator for $(3+t) e^{2t}$ er $(D-2)^2$ idet differentialligningen*

$$(D-2)^2 y = y'' - 4y' + 4y = 0$$

har e^{2t} og te^{2t} som løsninger.

Eksempel 332 *En annihilerende operator for $\left(4 - t^2\right) \cos 5t + 6 \sin 5t$ er $\left(D^2 + 25\right)^3$ idet differentialligningen*

$$\left(D^2 + 25\right)^3 y = 0$$

har karakterligning $\left(\lambda^2 + 25\right)^3 = 0$ og således har $\pm 5i$ som 3-dobbeltrødder. Dermed er $\cos 5t, \sin 5t, t \cos 5t, t \sin 5t, t^2 \cos 5t, t^2 \sin 5t$ hver for sig løsning til $\left(D^2 + 25\right)^3 y = 0$.

10.2 Den inhomogene ligning. Ubestemte koefficienters metode.

Ubestemte koefficienters metode kaldes ofte også gættemetoden. Vi betragter inhomogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter, altså ligninger af formen

$$ay'' + by' + cy = q(t) \qquad \text{(*inhom)}$$

De højre sider $q(t)$, der betragtes, er funktioner, der er løsninger til en eller anden homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter. Vi betragter altså ligninger, i hvilke $q(t)$ har form som beskrevet i sætningen ovenfor, q er altså en linearkombination af led af følgende form

$$q(t) = t^m e^{\alpha t} \begin{cases} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{cases}$$

hvor m er hel og ikke-negativ og $\alpha, \beta \in R$. Vi gør specielt opmærksom på, at en eller flere af α, β eller m kan være nul. Ubestemte kefficienters metode (Gættemetoden) benyttes til at bestemme en partikulær løsning til den inhomogene ligning, der med betegnelser fra tidligere kan skrives $p(D)\,y = q$, hvor p er karakterpolynomiet for differentialligningen. Idéen i metoden er følgende. Lad $h(D)$ være en annihilerende operator for q, d.v.s. en differentialoperator, så $h(D)\,q = 0$. Rødderne i polynomiet $h(\lambda)$ vil vi kalde annihilatorrødderne. For de betragtede højresider q findes der en annihilerende operator. Anvend nu $h(D)$ på begge sider af differentialligningen $p(D)\,y = q$. Herved fås

$$h(D)\,p(D)\,y = h(D)\,q = 0$$

Vi ser, at y derfor samtidig med at løse $p(D)\,y = q$ også løser den homogene differentialligning $h(D)\,p(D)\,y = 0$. Men vi ved alt om, hvordan en sådan skal løses. Skriv så løsningen ned. Fjern de led, der løser den homogene ligning $p(D)\,y = 0$. En partikulær løsning til $p(D)\,y = q$ må da have form som summen af de resterende led. Denne sum af led med en eller flere ubestemte konstanter udgør nu vores ansats (vores "gæt") for en partikulær løsning y_p. Konstanterne bestemmes dernæst ved indsættelse i den oprindelige ligning (*inhom)

Eksempel 333 *Betragt differentialligningen*

$$y'' + 3y' + 2y = 20te^{3t}$$

hvis tilsvarende homogene ligning vi løste i et eksempel ovenfor. Ligningen kan skrives

$$(D+1)(D+2)\,y = q(t)$$

hvor $q(t) = 20te^{3t}$*. Vi har, at* $h(D) = (D-3)^2$ *er en annihilerende operator for* q*, annihilatorrod er 3. Vi bemærker, at annihilatorroden er forskellig fra rødderne i karakterpolynomiet. Anvend nu* $(D-3)^2$ *på begge sider af ovenstående ligning, så fås*

$$(D-3)^2 (D+1)(D+2)\,y = (D-3)^2\, q(t) = 0$$

Løsningerne til differentialligningen er altså også løsninger til den homogene ligning

$$(D-3)^2 (D+1)(D+2)\,y = 0$$

og har derfor formen

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_4 t e^{3t}$$

De to første led er løsninger til den homogene ligning $y'' + 3y' + 2y = 0$. *De fjernes. Hermed er vores ansats for en partikulær løsning til den oprindelige differentialligning:*

$$y_p(t) = Ae^{3t} + Bte^{3t} = (A + Bt)\, e^{3t}$$

Denne ansats indsættes nu i den oprindelige inhomogene ligning, hvorved vi efter lidt regning får

$$(20A + 9B)\, e^{3t} + 20Bte^{3t} = 20te^{3t}$$

Da nu funktionerne e^{3t} *og* te^{3t} *er lineært uafhængige følger, at* $20A + 9B = 0$ *og* $20B = 20$. *Altså* $B = 1$ *og* $A = -\frac{9}{20}$, *d.v.s. en partikulær løsning til den inhomogene ligning er* $y_p(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$. *Den fuldstændige løsning til den givne ligning er derfor*

$$y(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

hvor c_1 *og* c_2 *er arbitrære konstanter.*

Eksempel 334 *Betragt differentialligningen*

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2t} + 4t + 25 \sin t$$

Den tilsvarende homogene ligning blev løst i et eksempel ovenfor. Den fuldstændige løsning var

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}, \qquad c_1, c_2 \in R$$

De tre inhomogene led behandler vi hver for sig, d.v.s. at vi finder en partikulær løsning for tre forskellige inhomogene ligninger. Disse tre partikulære løsningers sum vil så være en partikulær løsning til den givne ligning. Vi splitter højre side op, når den består af led med forskellige annihilatorrødder. Bemærk dog, at imaginære rødder altid kommer i par og ikke kan skilles, når der udelukkende ønskes reelle løsninger til differentialligningen. Den givne ligning kan skrives

$$(D + 2)^2\, y = q_1 + q_2 + q_3$$

En annihilerende operator for $q_1(t) = 4e^{-2t}$ *er* $D + 2$, *annihilatorrod er* -2. *Vi anvender* $D + 2$ *på ligningen* $(D + 2)^2\, y = q_1$. *Herved fås*

$$(D + 2)^3\, y = (D + 2)\, q_1 = 0$$

Denne homogene lignings fuldstændige løsning er

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t} + c_3 t^2 e^{-2t}$$

De to første led tilsammen udgør den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Ansatsen for ligningen $(D + 2)^2\, y = q_1$ *er derfor* $y_{p1}(t) = ct^2 e^{-2t}$. *Ved* *indsættelse fås* $c = 2$*, altså* $y_{p1}(t) = 2t^2e^{-2t}$*. Dette var vort første eksempel på resonans: At annihilatorroden er rod i karakterligningen. En annihilerende operator for* $q_2(t) = 4t$ *er* D^2*. Annihilatorrod er* 0*. Anvendes* D^2 *på ligningen* $(D+2)^2 y = q_1$ *fås*

$$D^2 (D+2)^2 y = D^2 q_2 = 0$$

Denne homogene lignings fuldstændige løsning er

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_3 + c_4t$$

De to første led tilsammen udgør den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Ansatsen for ligningen $(D+2)^2 y = q_2$ *er derfor* $y_{p2}(t) = a + bt$*. Ved indsættelse fås* $a = -1$ *og* $b = 1$*, altså* $y_{p2}(t) = -1+t$*. En annihilerende operator for* $q_3(t) = 25\sin t$ *er* D^2+1*. Annihilatorrødder er* $\pm i$*. Anvendes* D^2+1 *på ligningen* $(D+2)^2 y = q_1$ *fås*

$$\left(D^2+1\right)(D+2)^2 y = \left(D^2+1\right) q_3 = 0$$

Denne homogene lignings fuldstændige løsning er

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_3\cos t + c_4\sin t$$

De to første led tilsammen udgør den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Ansatsen for ligningen $(D+2)^2 y = q_3$ *er derfor* $y_{p3}(t) = a\cos t + b\sin t$*. Ved indsættelse fås* $a = -4$ *og* $b = 3$*, altså* $y_{p3}(t) = -4\cos t + 3\sin t$*. Summen af* y_{p1}, y_{p2} *og* y_{p3} *er nu en partikulær løsning til den givne differentialligning. Dennes fuldstændige løsning er dermed*

$$y(t) = 2t^2e^{-2t} - 1 + t - 4\cos t + 3\sin t + c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}, \qquad c_1, c_2 \in R$$

10.2.1 Opskrift på ansats

Ved overvejelser som i de foregående to eksempler føres vi til følgende opskrift på en ansats til en partikulær løsning til den inhomogene ligning med konstante koefficienter

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = q(t)$$

I skemaet betegner $Q_m(t)$ et konkret polynomium af grad m. Med $P_m(t)$ og $R_m(t)$ betegnes polynomier af grad m, hvor samtlige led forekommer (med ubestemte koefficienter), altså

$$\begin{aligned} P_m(t) &= A_mt^m + A_{m-1}t^{m-1} + \ldots + A_0 \\ R_m(t) &= B_mt^m + B_{m-1}t^{m-1} + \ldots + B_0 \end{aligned}$$

$q(t)$	$Q_m(t)$	$Q_m(t)e^{\alpha t}$	$Q_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ (eller $\sin\beta t$)
Annihilator	D^{m+1}	$(D-\alpha)^{m+1}$	$\left((D-\alpha)^2+\beta^2\right)^{m+1}$
A-rod	0	α	$\alpha \pm i\beta$
Ansats, y_p	$t^sP_m(t)$	$t^sP_m(t)e^{\alpha t}$	$t^s\left[P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + R_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t\right]$

Her skal s vælges som det mindste hele ikke-negative tal ($s = 0, 1, 2, 3\dots$), som sikrer, at intet led i ansatsen løser den homogene ligning. Anderledes sagt: s er multipliciteten af annihilatorroden (A-roden) i karakterpolynomiet. Hvis A-roden er rod i karakterpolynomiet, vil vi sige, at der er resonans. Det er altså i resonanstilfældet, at der skal ganges en faktor t^s på den basale ansats. Hvis A-roden ikke er rod i karakterpolynomiet, skal der ikke ganges noget på den basale ansats.

Bemærkning 335 *Det giver ofte færre regninger at opfatte højresiderne* $q(t) = Q_m(t)\, e^{\alpha t} \cos \beta t$ *og* $q(t) = Q_m(t)\, e^{\alpha t} \sin \beta t$ *som henholdsvis real- og imaginærdelen af* $Q_m(t)\, e^{(\alpha + i\beta)t}$. *Man finder så en partikulær (kompleks) løsning til den differentialligning, der har* $Q_m(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t}$ *som højreside. Hertil bruges en ansats som vist i skemaets anden linie, altså*

$$y_p(t) = t^s \left(A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \dots + A_0 \right) e^{(\alpha+i\beta)t}$$

For at få en partikulær løsning til den oprindelige ligning tager man så henholdsvis real- eller imaginærdelen af den fundne komplekse partikulære løsning.

Eksempel 336 *Betragt differentialligningen*

$$y'' - 5y' + 6y = 20e^{-t} \cos 4t$$

Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning er

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in R$$

Da $20e^{-t} \cos 4t = \operatorname{Re}\left(20e^{(-1+4i)t}\right)$ *finder vi nu en partikulær løsning til følgende differentialligning:*

$$y'' - 5y' + 6y = 20e^{(-1+4i)t}$$

Ansatsen for en partikulær løsning til denne er $y_p(t) = Ae^{(-1+4i)t}$. *Her vil* A *vise sig at blive en ikke-reel konstant. Ved indsættelse af ansatsen finder vi*

$$\left((-1+4i)^2 - 5(-1+4i) + 6 \right) Ae^{(-1+4i)t} = 20e^{(-1+4i)t}$$

Heraf fås

$$A = \frac{20}{-4-28i} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

Altså er en partikulær løsning til den komplekse ligning

$$y_p(t) = \left(-\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \right) e^{(-1+4i)t}$$

Realdelen af denne komplekse løsning er en partikulær løsning til den oprindelige ligning, og den er derfor givet ved

$$\operatorname{Re} y_p(t) = \operatorname{Re}\left(\left(-\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \right) e^{(-1+4i)t} \right) = -\frac{1}{10}e^{-t}\cos 4t - \frac{7}{10}e^{-t}\sin 4t$$

Den fuldstændige løsning til den oprindelige ligning er hermed

$$y(t) = -\frac{1}{10}e^{-t}\cos 4t - \frac{7}{10}e^{-t}\sin 4t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in R$$

Øvelse 337 *Find den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger:*

1. $y'' - 16y = 3e^{2t}$
2. $y'' - 16y = 3e^{4t}$
3. $y'' - 16y = 64t^2 + 8$
4. $y'' - 16y = 4\sin t$
5. $y'' + 16y = 32\sin 4t$

Kapitel 11

Ordensreduktion og Parametervariation

Det er kun i særlige tilfælde muligt at finde et eksplicit analytisk udtryk for løsningerne til en given differentialligning. Vi har dog set, at for særlige klasser af differentialligninger kan dette altid lade sig gøre, nemlig f.eks. for lineære differentialligninger med konstante koefficienter og med specielle højresider, som beskrevet ovenfor. Undertiden kan man ved mere eller mindre velbegrundet gætning (naturligvis efterfulgt af afprøvning) finde en eller flere løsninger til den homogene ligning. I så fald er man godt hjulpet af følgende metoder.Vi beskriver to metoder til bestemmelse af den fuldstændige løsning, under forudsætning af kendskab til en eller flere løsninger til den homogene ligning. Metoderne kan benyttes for lineære differentialligninger af n'te orden. Vi nøjes med at betragte det vigtigste tilfælde, nemlig $n = 2$. Betragt altså differentialligningen

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = q(t) \tag{*}$$

hvor vi forudsætter, at $a(t) \neq 0$ for alle $t \in I$, (et interval), og hvor vi, som ovenfor, forudsætter, at q og koefficientfunktionerne, a, b og c er kontinuerte på I.

11.1 Ordensreduktion

Antag, at y_1 er en løsning til den homogene ligning svarende til (*). Sæt den ubekendte funktion lig med y_1 gange en ny ubekendt funktion v. Altså $y = y_1 v$. Nedenfor skal vi vise, hvordan v kan bestemmes, og dermed er altså y bestemt. Når $y_1 v$ indsættes i stedet for y i (*), så fremkommer der en del led, der svarer til, at v overhovedet ikke er blevet differentieret, fordi differentiationerne allesammen er faldet på y_1. Disse led er de samme led, der ville komme, hvis v var konstant. Deres sum må derfor være $v\,(a(t)\, y_1'' + b(t)\, y_1' + c(t)\, y_1)$, altså lig nul, da y_1 er en løsning til den homogene ligning. Med andre ord ved indsættelse af $y = y_1 v$ fås en sum af led, der indeholder v' og v'', men ikke v selv. Dermed har vi opnået en førsteordensdifferentialligning i den ubekendte $w = v'$. Differentialligningens orden er blevet reduceret med 1, deraf metodens navn.Vi viser metoden i et eksempel.

Eksempel 338 *Betragt for $t > 0$ differentialligningen*

$$t^2 y'' - 2ty' + \left(t^2 + 2\right) y = t^3$$

Det oplyses, at $y_1(t) = t \sin t$ er løsning til den tilsvarende homogene ligning. (Kontrollér selv det). Sæt nu $y(t) = v(t) t \sin t$. Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} y'(t) &= v'(t) t \sin t + v(t)(\sin t + t \cos t) \\ y''(t) &= v''(t) t \sin t + 2v'(t)(\sin t + t \cos t) + v(t)(2 \cos t - t \sin t) \end{aligned}$$

Ved indsættelse og efter reduktion finder vi, at v tilfredsstiller følgende differentialligning:

$$v''(t) t^3 \sin t + v'(t) 2t^3 \cos t = t^3$$

Med $w = v'$ og efter division med $t^3 \sin t$ (antag i første omgang, at $0 < t < \pi$, så $\sin t > 0$) finder vi følgende lineære førsteordens differentialligning

$$w' + 2 \cot t \, w = \frac{1}{\sin t}$$

Denne løses v.hj.a. Panserformlen. Vi finder

$$w(t) = \frac{-\cos t + c_1}{\sin^2 t}$$

Ved integration fås så

$$v(t) = \frac{1}{\sin t} + c_1 \cot t + c_2$$

Den fuldstændige løsning til den oprindelige differentialligning er derfor

$$y(t) = v(t) t \sin t = t + c_1 t \cos t + c_2 t \sin t$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter og $t > 0$. I første omgang fås resultatet kun for $0 < t < \pi$, men det ses ved indsættelse i den oprindelige ligning, at funktionerne er løsninger for alle $t > 0$. De angivne løsninger udgør også den fuldstændige *løsning for $t > 0$ (hvorfor?)*

Opgave 339 *Løs differentialligningen*

$$\left(1 + t^2\right) y'' + ty' - y = 3\left(1 + t^2\right)$$

idet man først skal eftervise, at $y(t) = t$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning.

Bemærkning 340 *Maple-pakken DEtools indeholder en kommando reduceOrder, der udfører ordensreduktion, men vel at mærke kun på den tilsvarende homogene ligning, uanset om den får en inhomogen ligning. Den må derfor kombineres med parametervariationsmetoden.*

11.2 Parametervariationsmetoden

Antag nu, at vi kender to løsninger y_1 og y_2 til den tilsvarende homogene ligning, og at deres Wronskideterminant W er forskellig fra nul. Naturligvis kunne vi ignorere den ene og blot gøre som ovenfor. Men vi udnytter begge i følgende metode, hvis slutresultat er en formel for en partikulær løsning til den inhomogene ligning (*). Sæt $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$, hvor nu v_1 og v_2 er to nye ubekendte funktioner. Det kan synes mærkeligt, at vi i denne situation, hvor vi véd mere, introducerer flere ubekendte funktioner, end vi gjorde i ordensreduktionsmetoden ovenfor. Men vi kan så tillade os at forlange mere om v_1 og v_2 end det, der følger af forlangendet om, at y løser ligning (*). Ved differentiation af $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ fås $y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_1' y_1 + v_2' y_2$. Vi forlanger nu af v_1 og v_2, at de opfylder $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$. Hermed er $y' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$. Efter endnu en differentiation fås $y'' = v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$. Indsættelse i (*) med udnyttelse af, at v_1 og v_2 tilfredsstiller den homogene ligning, giver $a(t)(v_1' y_1' + v_2' y_2') = q(t)$. Hermed har vi fundet, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ tilfredsstiller (*) er, at funktionerne $v_1$og v_2 opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' &= \frac{q(t)}{a(t)} \end{aligned}$$

Dette ligningssystem har præcis én løsning, idet systemets determinant er Wronskideterminanten W for de to løsninger y_1 og y_2 til den homogene ligning, og da denne blev antaget forskellig fra nul. Løsningen er

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= -\frac{y_2(t)\, q(t)}{a(t)\, W(t)} \\ v_2'(t) &= \frac{y_1(t)\, q(t)}{a(t)\, W(t)} \end{aligned}$$

Ved integration og indsættelse i $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ fås (når integrationskonstanter udelades)

$$y_p(t) = y_1(t) \int -\frac{y_2(t)\, q(t)}{a(t)\, W(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)\, q(t)}{a(t)\, W(t)} dt$$

Hermed har vi en partikulær løsning. Den fuldstændige løsning er så som sædvanligt $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$, med to arbitrære konstanter c_1 og c_2.

Eksempel 341 *Betragt igen for $t > 0$ differentialligningen*

$$t^2 y'' - 2ty' + \left(t^2 + 2\right) y = t^3$$

Det oplyses nu, at både $y_1(t) = t \sin t$ og $y_2(t) = t \cos t$ er løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Wronski-determinanten for disse to funktioner er

$$W(t) = \begin{vmatrix} t \sin t & t \cos t \\ \sin t + t \cos t & \cos t - t \sin t \end{vmatrix} = -t^2$$

der jo er forskellig fra nul, da $t > 0$. Parametervariationsformlen ovenfor giver en partikulær løsning:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= t\sin t\int -\frac{t\cos t\, t^3}{t^2(-t^2)}dt + t\cos t\int \frac{t\sin t\, t^3}{t^2(-t^2)}dt \\ &= t\sin t\int \cos t\, dt - t\cos t\int \sin t dt \\ &= t\sin^2 t + t\cos^2 t = t \end{aligned}$$

Den fuldstændige løsning er dermed $y(t) = t + c_1 t\sin t + c_2 t\cos t$, med to arbitrære konstanter c_1 og c_2, ganske som vi fandt i Eksempel 10.1.

Eksempel 342 *Betragt for $t > 0$ differentialligningen*

$$t(1 - t\ln t)y'' + \left(t^2\ln t + 1\right)y' - (t+1)y = e^t(1 - t\ln t)^2$$

Det oplyses, at e^t og $\ln t$ begge er løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Vi vil først bestemme den fuldstændige løsning til den givne ligning. Desuden vil vi bestemme de løsninger, der har en grænseværdi for $t \to 0^+$ og specielt den løsning, for hvilken denne grænseværdi er nul.

Med $y_1 = e^t$ og $y_2 = \ln t$ fås af parametervariationsformlen efter lidt simplifikation

$$y_p = e^t\int -\ln t\, dt + \ln t\int e^t dt = e^t(t - t\ln t) + \ln t\, e^t$$

Fuldstændig løsning er

$$y(t) = e^t(t - t\ln t) + \ln t\, e^t + c_1 e^t + c_2\ln t$$

hvor $c_1, c_2 \in R$. Da $t\ln t \to 0$ for $t \to 0^+$, er det nødvendigt, at $c_2 = -1$, hvis $\lim_{t\to 0+} y(t)$ skal eksistere. Det er også tilstrækkeligt, da

$$\ln t\left(e^t - 1\right) = t\ln t\,\frac{e^t - 1}{t} \to 0 \cdot 1 = 0$$

for $t \to 0+$. Vi har $\lim_{t\to 0+} y(t) = 0$, når $c_2 = -1$ og $c_1 = 0$.

Kapitel 12

Andre Specielle Lineære Differentialligninger

12.1 Euler-differentialligninger

En differentialligning af typen

$$at^2y'' + bty' + cy = 0$$

hvor a, b og c er reelle konstanter og $a \neq 0$, kaldes en Euler-differentialligning (af anden orden). Vi skal forudsætte, at $t > 0$. Den kan løses ved at sætte $y = t^r$, hvor eksponenten r skal bestemmes, så vi har en løsning. Ved indsættelse fås, idet $y' = rt^{r-1}$ og $y'' = r(r-1)t^{r-2}$, at vi forlanger følgende opfyldt for alle $t > 0$

$$at^2r(r-1)t^{r-2} + btrt^{r-1} + ct^r = 0$$

Dette kan skrives

$$(ar(r-1) + br + c)t^r = 0$$

hvilket er opfyldt netop når

$$ar(r-1) + br + c = 0$$

Denne ligning har enten to reelle rødder, én reel dobbeltrod eller to imaginære rødder, der er hinandens kompleks konjugerede. Situationen minder unægteligt meget om forholdene ved differentialligninger med konstante koefficienter. Man kan da også i stedet for ved et trick få overblik over situationen. Sæt $s = \ln t$, altså $t = e^s$. Sæt $u(s) = y(e^s)$. Så har vi $y(t) = u(\ln t)$ og

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(\ln t)\frac{1}{t} \\ y''(t) &= u''(\ln t)\frac{1}{t^2} - u'(\ln t)\frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Indsættes dette i differentialligningen $at^2y'' + bty' + cy = 0$ fås

$$a\left(u''(\ln t) - u'(\ln t)\right) + bu'(\ln t) + cu(\ln t) = 0$$

Altså

$$au''(s) + (b-a)u'(s) + cu(s) = 0$$

Denne ligning har konstante koefficienter. Ved at bruge resultaterne for sådanne ligninger finder vi følgende resultat:

Sætning 343 *Betragt for $t > 0$ Euler-differentialligningen*

$$at^2y'' + bty' + cy = 0$$

hvor a, b og c er reelle konstanter og $a \neq 0$. Lad $p(r) = ar^2 + (b-a)r + c$. Så gælder:

1. *Hvis p har to (forskellige) reelle rødder r_1 og r_2, så er den fuldstændige løsning*

$$y(t) = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0.$

2. *Hvis p har en reel dobbeltrod r, så er den fuldstændige løsning*

$$y(t) = c_1t^r + c_2t^r \ln t$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0.$

3. *Hvis p har to ikke-reelle rødder, $\lambda = \mu \pm i\nu$, med $\nu \neq 0$, så er den fuldstændige løsning*

$$y(t) = c_1t^\mu \cos(\nu \ln t) + c_2t^\mu \sin(\nu \ln t)$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0.$

Eksempel 344 *Betragt for $t > 0$ Euler-differentialligningen*

$$t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$$

Vi sætter $y(t) = t^r$, og finder, at r skal opfylde ligningen $r(r-1) - 4r + 6 = 0$, altså $r^2 - 5r + 6 = 0$. Denne har rødderne 2 og 3. Den fuldstændige løsning er derfor

$$y(t) = c_1t^2 + c_2t^3$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0.$

Eksempel 345 *Betragt for $t > 0$ Euler-differentialligningen*

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$$

Vi sætter $y(t) = t^r$, og finder, at r skal opfylde ligningen $r(r-1) - 3r + 4 = 0$, altså $r^2 - 4r + 4 = 0$. Denne har dobbeltroden 2. Den fuldstændige løsning er derfor

$$y(t) = c_1t^2 + c_2t^2 \ln t$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0.$

Eksempel 346 *Betragt for $t > 0$ Euler-differentialligningen*

$$t^2y'' + 3ty' + 5y = 0$$

Vi sætter $y(t) = t^r$, og finder, at r skal opfylde ligningen $r(r-1) + 3r + 5 = 0$, altså $r^2 + 2r + 5 = 0$. Denne har rødderne $-1 \pm 2i$. Den fuldstændige løsning er derfor

$$y(t) = c_1 t^{-1}\cos(2\ln t) + c_2 t^{-1}\sin(2\ln t)$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0$.

12.2 Bessels differentialligning

Betragt for $t > 0$ differentialligningen

$$t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \nu^2\right)y = 0$$

hvor ν er en konstant, kaldes en Bessel-differentialligning efter den tyske astronom og matematiker F.W. Bessel (1784-1846). Den fuldstændige løsning er givet ved

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0$, hvor funktionerne J_ν og Y_ν er de såkaldte Besselfunktioner af første og anden art, henholdsvis.

For god ordens skyld skal vi her give Besselfunktionernes definition.

Definition 347 *Når ν ikke er et negativt helt tal sættes for alle $z \in C$*

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}$$

Når $\nu \notin Z$ sættes for alle $z \in C$

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

Når n er et ikke-negativt helt tal sættes

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z)$$

Bemærkning 348 *En uendelig sum som den, der optræder i definitionen af J_ν, kaldes en uendelig række. Eksponentialfunktionen, sinus- og cosinus-funktionerne kan udtrykkes ved uendelige rækker på følgende måde*

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

For at eksemplificere meningen med disse tre udsagn, kan vi tage det midterste. Meningen er, at for ethvert givet z kan

$$\left|\sin z - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|$$

gøres mindre end ethvert givet tal $\varepsilon > 0$, når blot n vælges større end en til ε svarende værdi, n_ε. Tag først som eksempel $z = \frac{\pi}{6}$. Vi ved jo i forvejen, at $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, og finder, når $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, at $s_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5000000000$ med 10 betydende cifre for alle $n \geq 4$. Her er brugt Maple, men der findes også teoretiske metoder til at afgøre, hvor mange led man skal tage med i summen for at opnå et givet antal korrekte cifre. Tag dernæst som eksempel et meget større z, nemlig $z = 10\pi + \frac{\pi}{6}$. Vi har stadig, at $\sin z = \frac{1}{2}$, men for at opnå 10 korrekte cifre i resultatet for $s_n(z)$ skal vi have $n \geq 51$. Man ser betydningen af, at udlede egenskaber for sinus-funktionen, i dette tilfælde dens periodicitet, så vi kan udnytte, at $\sin\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Sætning 349 *Der gælder, at Wronskideterminanten for parret $J_\nu, J_{-\nu}$ er givet ved*

$$W\left(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\right) = \frac{-2\sin(\nu\pi)}{\pi z}$$

og Wronskideterminanten for parret J_ν, Y_ν er givet ved

$$W\left(J_\nu(z), Y_\nu(z)\right) = \frac{2}{\pi z}$$

Korollar 350 *Den fuldstændige løsning til Bessels differentialligning kan altid skrives på formen*

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0$. Når $\nu \notin Z$ kan den fuldstændige løsning også skrives på formen

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$$

$c_1, c_2 \in R, t > 0$.

Besselfunktionerne $J_{n+\frac{1}{2}}$, hvor $n \in Z$ kan udtrykkes ved sin og cos, eksempelvis er de simpleste af disse "Besselfunktioner af ulige halv orden" givet ved

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z, \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z$$

Sætning 351 *Besselfunktionerne opfylder følgende rekursionsformel*

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z)$$

Endvidere gælder

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(z^{\nu}J_{\nu}(z)\right) &= z^{\nu}J_{\nu-1}(z)\\
\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_{\nu}(z)\right) &= -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)
\end{aligned}$$

De to første gælder, når $\nu-1$ ikke er et negativt helt tal, den sidste når ν ikke er et negativt helt tal. Alle tre gælder også for Y.

Eksempel 352 *Rekursionsformlen for J_ν kan bruges til at udregne $J_{\frac{3}{2}}(z)$ udfra kendskabet til $J_{-\frac{1}{2}}(z)$ og $J_{\frac{1}{2}}(z)$. Vi tager $\nu=\frac{1}{2}$ i rekursionsformlen og finder*

$$\begin{aligned}
J_{\frac{3}{2}}(z) &= \frac{1}{z}J_{\frac{1}{2}}(z)-J_{-\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sin z-\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos z\\
&= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)
\end{aligned}$$

Løsningerne til differentialligninger af formen

$$t^2y''+aty'+\left(bt^m+c\right)y=0$$

hvor a,b og m er konstanter, og hvor $b\neq 0, m\neq 0$, kan alle udtrykkes ved Besselfunktioner.

Eksempel 353 *Vi vil for $t>0$ og $t<0$ finde den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$y''+t^2y=0$$

Vi indfører en ny uafhængig variabel s ved $s=\frac{1}{2}t^2$ og sætter $w(s)=(2s)^{-\frac{1}{4}}\,y\left((2s)^{\frac{1}{2}}\right)$ altså $y(t)=t^{\frac{1}{2}}w\left(\frac{1}{2}t^2\right)$. Ved differentiatioin af det sidste udtryk fås

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}w\left(\frac{1}{2}t^2\right)+t^{\frac{3}{2}}w'\left(\frac{1}{2}t^2\right)\\
y''(t) &= -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}w\left(\frac{1}{2}t^2\right)+2t^{\frac{1}{2}}w'\left(\frac{1}{2}t^2\right)+t^{\frac{5}{2}}w''\left(\frac{1}{2}t^2\right)
\end{aligned}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned}
0 &= y''(t)+t^2y(t)\\
&= t^{\frac{5}{2}}w''\left(\frac{1}{2}t^2\right)+2t^{\frac{1}{2}}w'\left(\frac{1}{2}t^2\right)+\left(t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}\right)w\left(\frac{1}{2}t^2\right)\\
&= 4t^{-\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2w''\left(\frac{1}{2}t^2\right)+\frac{1}{2}t^2w'\left(\frac{1}{2}t^2\right)+\left(\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2-\frac{1}{16}\right)w\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right)\\
&= 4t^{-\frac{3}{2}}\left(s^2w''(s)+sw'(s)+\left(s^2-\frac{1}{16}\right)w(s)\right)
\end{aligned}$$

altså

$$s^2 w''(s) + sw'(s) + \left(s^2 - \frac{1}{16}\right) w(s) = 0$$

således, at

$$w(s) = c_1 J_{-\frac{1}{4}}(s) + c_2 J_{\frac{1}{4}}(s)$$

hvormed

$$y(t) = t^{\frac{1}{2}} w\left(\frac{1}{2}t^2\right) = c_1 t^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

med $c_1, c_2 \in R$. *I stedet for* $J_{-\frac{1}{4}}$ *kan bruges* $Y_{\frac{1}{4}}$.

Eksempel 354 *Løsningen af Ricatti-ligningen*

$$y' = t^2 + y^2$$

kan man ved at sætte $y(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)}$ *reducere til løsningen af ligningen*

$$u'' + t^2 u = 0$$

Hermed finder vi følgende løsninger, gældende for $t > 0$ *og for* $t < 0$*:*

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{\frac{d}{dt}\left(c_1 t^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right)}{c_1 t^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)} \\
&= -\frac{-c_1 t^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 t^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{c_1 t^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)} \\
&= t\frac{c_1 J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) - c_2 J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{c_1 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}
\end{aligned}$$

Løsningerne kan også gives på formen

$$y(t) = -t\frac{c_1 Y_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{c_1 Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + c_2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}$$

Kapitel 13

Ricatti-differentialligninger

Jacopo Francesco Ricatti (1676-1754) studerede i 1724 ligningen

$$y' + ay^2 = bt^m$$

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) udvidede i 1763 studiet til ligninger af typen

$$y' = q_0(t) + q_1(t)\, y + q_2(t)\, y^2 \tag{R}$$

Disse kaldes Ricatti-ligninger. Bemærk, at hvis $q_0(t) = 0$ for alle $t \in I$, så er (R) en Bernoulli-ligning, og hvis $q_2(t) = 0$ for alle $t \in I$, så er (R) lineær.

Sætning 355 *Antag, at q_0 og q_1 er kontinuerte og q_2 differentiabel med q_2' kontinuert på intervallet I. Antag videre, at $q_2(t) \neq 0$ for alle $t \in I$. Så gælder, at hvis y er løsning til (R) på I, så er $u = \exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)$ løsning til*

$$u'' - \left(\frac{q_2'(t)}{q_2(t)} + q_1(t)\right) u' + q_0(t)\, q_2(t)\, u = 0 \tag{R2}$$

på I. Omvendt gælder: Hvis u er løsning til (R2) på et interval $J \subseteq I$ og $u(t) \neq 0$ for alle $t \in J$, så er $y = -\frac{u'}{q_2(t)u}$ løsning til (R).

Bevis. Bemærk først, at hvis $u = \exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)$, så har vi, at $u(t) \neq 0$ og vi får ved differentiation, at

$$u' = -q_2(t)\, y(t) \exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right) = -q_2(t)\, y(t)\, u$$

altså $y = -\frac{u'}{q_2(t)u}$. Har vi omvendt, at $u(t) \neq 0$ på et interval J og sætter vi $y = -\frac{u'}{q_2(t)u}$, så har vi $u' = -q_2(t)\, y(t)\, u$, hvoraf fås, at der eksisterer en konstant C, så

$$u = C \exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)$$

Da $u(t) \neq 0$ på J, må $C \neq 0$.

Antag nu, at y er løsning til (R) på I. Lad $u = \exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)$. Så har vi $y = -\frac{u'}{q_2 u}$ og dermed

$$y' = \frac{-q_2 u' u + u'\left(q_2' u + q_2 u'\right)}{q_2^2 u^2}$$

Dette indsættes i (R), hvorved vi får

$$\frac{-q_2 u' u + u'\left(q_2' u + q_2 u'\right)}{q_2^2 u^2} = q_0 + q_1\left(-\frac{u'}{q_2 u}\right) + q_2\left(-\frac{u'}{q_2 u}\right)^2$$

der efter reduktion giver (R2).

Antag omvendt, at u er en løsning til (R2), der er forskellig fra nul på $J \subseteq I$. Lad $y = -\frac{u'}{q_2(t)u}$. Så har vi $u = C\exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)$ med en konstant $C \neq 0$. Da $u' = C\exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)(-q_2 y)$ og $u'' = C\exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)\left(q_2^2 y^2 - q_2' y - q_2 y'\right)$ fås ved indsættelse i (R2) og efter division med den fælles faktor $C\exp\left(-\int q_2(t)\, y(t)\, dt\right)$, at

$$\left(q_2^2 y^2 - q_2' y - q_2 y'\right) - \left(\frac{q_2'(t)}{q_2(t)} + q_1(t)\right)(-q_2 y) + q_0(t)\, q_2(t) = 0$$

der efter reduktion og division med q_2 giver (R). ■

Korollar 356 *Vil man løse Ricatti-ligningen*

$$y' = q_0(t) + q_1(t)\, y + q_2(t)\, y^2 \tag{R}$$

så finder man først den fuldstændige løsning til følgende lineære homogene differentialligning af anden orden

$$u'' - \left(\frac{q_2'(t)}{q_2(t)} + q_1(t)\right)u' + q_0(t)\, q_2(t)\, u = 0 \tag{R2}$$

Er den fuldstændige løsning u fundet, har man da, at den fuldstændige løsning for y er givet ved

$$y = -\frac{u'}{q_2 u}$$

hvor y er defineret på et interval på hvilket $u \neq 0$.

Eksempel 357 *Betragt for $t > 0$ differentialligningen*

$$y' = -\frac{3}{t^2} + \frac{3}{t}y - y^2$$

Denne er åbenbart en Ricatti-ligning. Differentialligningen (R2) får formen

$$u'' - \frac{3}{t}u' + \frac{3}{t^2}u = 0$$

eller anderledes skrevet

$$t^2u'' - 3tu' + 3u = 0$$

Dette er en Euler differentialligning. Den løses ved at sætte $u = t^r$, *herved fås, at* r *skal opfylde ligningen*

$$r(r-1) - 3r + 3 = 0$$

altså $r^2 - 4r + 3 = 0$, *der har rødderne* -1 *og* 3. *Dermed er den fuldstændige løsning for* u *givet ved*

$$u = c_1 t + c_2 t^3$$

hvor c_1 *og* c_2 *er vilkårlige konstanter. Den fuldstændige løsning til den givne Ricattiligning er så*

$$y = -\frac{u'}{q_2 u} = \frac{u'}{u} = \frac{c_1 + 3c_2t^2}{c_1t + c_2t^3}$$

Selv om den fuldstændige løsning formelt indeholder to vilkårlige konstanter, så er der i realiteten kun én: Når $c_2 \neq 0$ *kan løsningerne skrives*

$$y = \frac{C + 3t^2}{Ct + t^3}$$

hvor $C = \frac{c_1}{c_2}$. *Foruden de løsninger, der svarer til* $C \in R$ *har vi yderligere løsningen* $y = \frac{1}{t}$ *svarende til* $c_2 = 0$.

Eksempel 358 *I en omrørt tank uden gennemstrømning foregår følgende reversible reaktion mellem stofferne A, B og C:*

$$A + A \rightleftarrows B + C$$

Temperaturen tænkes holdt konstant. Reaktionerne tænkes at være elementære, d.v.s. at omsætningshastigheden er proportional med produktet af de reagerende stoffers koncentrationer, som vi betegner med henholdsvis a, b *og* c. *Begyndelseskoncentrationerne er* a_0, b_0 *og* c_0. *Hermed finder vi følgende differentialligning for* a:

$$\frac{da}{dt} = -2k_1a^2 + 2k_2bc$$

hvor k_1 *og* k_2 *er de såkaldte (støkiometrisk bestemte) hastighedskonstanter. At der er 2-taller på begge led på højre side, skyldes, at hver gang et mol B (eller C) dannes eller omdannes, omdannes eller dannes 2 mol A. Derfor gælder også, at* $\frac{1}{2}a+b$ *og* $\frac{1}{2}a+b$ *begge er konstante. Lad os kalde disse konstanter for* K_1 *og* K_2, *henholdsvis. Med* $K = K_1 + K_2$ *er* K *den konstante sum af koncentrationerne af* a, b *og* c, *altså lig med* $a_0 + b_0 + c_0$. *Vi kan nu eliminere* b *og* c *fra differentilligningen og finder*

$$\frac{da}{dt} = -2k_1a^2 + 2k_2\left(K_1 - \frac{1}{2}a\right)\left(K_2 - \frac{1}{2}a\right)$$

hvilket også kan skrives

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)\,a^2 - k_2 K a + 2k_2 K_1 K_2 \tag{A}$$

Da koefficienterne til a^2, a^1 og a^0 er konstante, er differentialligningen (A) separabel og kan derfor løses som en sådan. Men ligningen er imidlertid også en Ricatti-ligning, og dette vil vi udnytte. (Hvis $k_2 - 4k_1 = 0$ er ligningen lineær. Vi overlader behandlingen af dette specialtilfælde til læseren). Den til (A) svarende lineære differentialligning af anden orden er

$$u'' + k_2 K u' + k_2 K_1 K_2 (k_2 - 4k_1)\,u = 0$$

Denne andenordens differentialligning har konstante koefficienter. Karakterligningen er

$$\lambda^2 + k_2 K \lambda + k_2 K_1 K_2 (k_2 - 4k_1) = 0$$

der har diskriminanten

$$\begin{aligned} D &= k_2^2 K^2 - 4(k_2 - 4k_1)\,k_2 K_1 K_2 \\ &= k_2^2 (K_1 - K_2)^2 + 16 k_1 k_2 K_1 K_2 > 0 \end{aligned}$$

De to rødder er

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-k_2 K \pm \sqrt{D}\right)$$

Bemærk, at $\lambda_- < 0$ altid, og at λ_+ og $k_2 - 4k_1$ har modsat fortegn. Den fuldstændige løsning er

$$u = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$. Den fuldstændige løsning til (A) er dermed givet ved

$$\begin{aligned} a &= -\frac{u'}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)\,u} = -\frac{c_1 \lambda_+ e^{\lambda_+ t} + c_2 \lambda_- e^{\lambda_- t}}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)\left(c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t}\right)} \\ &= -\frac{c_1 \lambda_+ e^{\frac{1}{2}t\sqrt{D}} + c_2 \lambda_- e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{D}}}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)\left(c_1 e^{\frac{1}{2}t\sqrt{D}} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{D}}\right)} \\ &= -\frac{c_1 \lambda_+ e^{\frac{1}{2}t\sqrt{D}} + c_2 \lambda_- e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{D}}}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)\left(c_1 e^{\frac{1}{2}t\sqrt{D}} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{D}}\right)} \end{aligned}$$

Med $c_2 = 0$ og $c_1 \neq 0$ fås den konstante løsning

$$a = \frac{-\lambda_+}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)} = \frac{k_2 K - \sqrt{D}}{k_2 - 4k_1} = a_1$$

Denne er positiv, da λ_+ og $k_2 - 4k_1$ har modsat fortegn. Med $c_1 = 0$ og $c_2 \neq 0$ fås også en konstant løsning

$$a = \frac{-\lambda_-}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)} = \frac{k_2 K + \sqrt{D}}{k_2 - 4k_1} = a_2$$

Når $k_2 - 4k_1 < 0$, har vi $a_2 < 0$, så løsningen a_2 er uinteressant i det tilfælde. Når $k_2 - 4k_1 > 0$, er $a_2 > K$, så løsningen a_2 er derfor også i dette tilfælde uinteressant. Vi kan derfor forudsætte, at $c_1 \neq 0$. Den fuldstændige løsning kan nu med $C = \frac{c_2}{c_1}$ omskrives til

$$\begin{aligned} a(t) &= -\frac{\lambda_+ + C\lambda_- e^{-t\sqrt{D}}}{\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)\left(1 + Ce^{-t\sqrt{D}}\right)} \\ &= a_1 + \frac{2C\sqrt{D}e^{-t\sqrt{D}}}{(k_2 - 4k_1)\left(1 + Ce^{-t\sqrt{D}}\right)} \\ &= a_1 + \frac{2C\sqrt{D}}{(k_2 - 4k_1)\left(C + e^{t\sqrt{D}}\right)} \end{aligned}$$

Vi ser, at $a(t) \to a_1$ for $t \to \infty$. Værdien af C er bestemt af begyndelseskoncentrationerne.

Bemærkning 359 *Det er meget let at løbe sur i beregningerne ovenfor. Følgende observation kan hjælpe til at bevare overblikket. Differentialligningen kan skrives*

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)(a - a_2)(a - a_1)$$

hvor a_1 og a_2 blev bestemt ovenfor. Da $a_2 < 0$ for $k_2 - 4k_1 < 0$ og $a_2 > K = a_0 + b_0 + c_0$ for $k_2 - 4k_1 > 0$ har vi altid, at $\frac{1}{2}(k_2 - 4k_1)(a - a_2) < 0$. Vi ser derfor, at $\frac{da}{dt} > 0$ for $a < a_1$ og $\frac{da}{dt} < 0$ for $a > a_1$. Hvis altså vi starter med en koncentration $a_0 < a_1$, så vil a vokse op mod a_1, og vi starter med en koncentration $a_0 > a_1$, så vil a aftage ned mod a_1.

Eksempel 360 *Betragt for $t > 0$ Ricatti-ligningen*

$$y' + y^2 = 2t^{-2}$$

Ligningen blev i afsnittet om separable differentialligninger løst ved et "trick". Her bruger vi den ovenfor beskrevne metode. Med $y = \frac{u'}{u}$ opfylder u differentialligningen

$$u'' - 2t^{-2}u = 0$$

der også kan skrives

$$t^2u'' - 2u = 0$$

Dette er en Euler differentialligning, og den har den fuldstændige løsning

$$u = c_1t^{-1} + c_2t^2$$

hvor $c_1, c_2 \in R$. Hermed finder vi

$$y = \frac{-c_1t^{-2} + 2c_2t}{c_1t^{-1} + c_2t^2}$$

Tages $c_2 = 0$ *og* $c_1 \neq 0$*, fås løsningen* $y(t) = -\frac{1}{t}$*. De andre løsninger (med* $c_2 \neq 0$ *) kan skrives* $y(t) = \frac{2t^3+K}{t(t^3-K)}$*, hvor* $K \in R$*. Vi har sat* $K = -\frac{c_1}{c_2}$ *af hensyn til sammenligningen med det tidligere fundne resultat.*

Kapitel 14

Taylorpolynomier og Rækkeudvikling

14.1 Approksimation ved Taylorpolynomier

Et polynomium i den variable x er et udtryk af formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hvor *koefficienterne* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er tal (enten reelle eller komplekse). Bemærk, at eksponenterne til x alle er ikke-negative hele tal. Hvis $a_n \neq 0$, vil vi kalde a_n for *den ledende koefficient*, og sige at polynomiets *grad* er n. Et polynomium af 0'te grad er blot et tal $a_0 \neq 0$. Nulpolynomiet er blot udtrykket 0. Når det overhovedet tillægges en grad, siger man at den er $-\infty$.

Eksempel 361 *Udtrykkene* $2x^3 - x + 11, -\pi x^6 + 5x^5 + (5+3i)\, x^2 + x$ *og 7 er polynomier i den variable* x *af grader henholdsvis 3, 6 og 0. Udtrykkene* $4x^{-2} + 6x^{-1} - 8 + x + \frac{1}{2}x^2$ *og* $5x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ *er* ***ikke*** *polynomier i den variable* x*. Et udtryk med uendeligt mange led som* $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^k + \ldots$ *er ikke et polynomium, men kaldes en uendelig række.*

Et polynomium i den variable x kan naturligvis betragtes som en funktion af x. Som sådan udregnes funktionsværdierne særdeles effektivt og hurtigt, hvis polynomiet skrives på *Hornerform* således som følgende eksempel antyder

$$p\,(x) = 7x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 5x + 87 = (((7x+3)\,x - 14)\,x + 5)\,x + 87$$

Polynomier er også i andre henseender lette at have at gøre, så det kan være en god idé at erstatte en kompliceret eller næsten umulig funktion f med et polynomium. Dette forudsætter selvfølgelig, at den fejl man herved begår er af acceptabel størrelse, altså ligger indenfor en given tolerance.

Et Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt a er et polynomium af grad højst n, således beskaffen, at f og P_n har samme afledede i punktet a op til og med n'te orden. Altså

$$\begin{aligned} f(a) &= P_n(a), f'(a) = P_n'(a), f''(a) = P_n''(a), \\ &\dots \\ f^{(n-1)}(a) &= P_n^{(n-1)}(a), f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Vi må forvente, at f og P_n ligner hinanden meget i omegnen af udviklingspunktet a, jo mere desto større n er. Ved at skrive det søgte polynomium P_n på formen

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

vises det meget let, at koefficienterne a_k kan udregnes udfra f efter følgende formel

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

hvor vi bruger den konvention, at den 0'te afledede blot er funktionen selv. Altså er det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt a givet ved

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \end{aligned}$$

Eksempel 362 *Vi vil bestemme både det tredie* (P_3) *og det fjerde* (P_4) *Taylorpolynomium for sinusfunktionen* sin *med udviklingspunkt 0. Vi finder, når* $f(x) = \sin x$, *at*

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

Hermed har vi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

Altså har vi

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

og da $f^{(4)}(0) = 0$, *har vi* $P_4 = P_3$.

Eksempel 363 *Vi bestemmer det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt* 1 *for funktionen* f *givet ved* $f(x) = x^2 \ln x$. *Vi finder*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln x + x \\ f''(x) &= 2 \ln x + 3 \end{aligned}$$

Altså har vi $f(1) = 0, f'(1) = 1$ *og* $f''(1) = 3$. *Taylorpolynomiet* P_2 *er dermed givet ved forskriften*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 \end{aligned}$$

Eksempel 364 *Vi vil bestemme det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt* 0 *for eksponentialfunktionen* exp. *Med* $f(x) = \exp x = e^x$ *har vi, at* $f^{(k)}(x) = e^x$ *for alle* $k \geq 0$ *og* $x \in R$. *Dermed finder vi, at* $f^{(k)}(0) = 1$ *for alle* $k \geq 0$, *således at*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Det er klart af stor interesse at vide noget om størrelsen af den fejl, der begås ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt a. Til en vurdering af denne fejl er Taylors sætning velegnet.

Sætning 365 ***Taylors Sætning***. *Antag, at* f *er* $n+1$ *gange differentiabel i en omegn om* a. *Så findes der til ethvert givet* x *i denne omegn et tal* ξ *mellem* x *og* a, *så*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

hvor P_n *betegner det n'te Taylorpolynomium med udviklingspunkt* a, *d.v.s.*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Bevis. *Bevis nummer 1.* Vi minder først om den udvidede middelværdisætning: Antag, at funktionerne h og g er kontinuerte i intervallet $[a, b]$ og differentiable i $]a, b[$. Så findes der et tal $\xi \in]a, b[$, så

$$[h(b) - h(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, h'(\xi).$$

I den udvidede middelværdisætning tager vi $h(x) = f(x) - P_n(x)$ og $g(x) = (x-a)^{n+1}$. Så har vi

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - P_n(a) = 0, h'(a) = f'(a) - P_n'(a) = 0, \\ h''(a) &= f''(a) - P_n''(a) = 0, ..., h^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P_n^{(n)}(a) = 0, \end{aligned}$$

og for g gælder tilsvarende $g(a) = 0, g'(a) = 0, g''(a) = 0, ..., g^{(n)}(a) = 0$. Lad nu x ligge i den omtalte omegn om a. Lad os sige, at $x > a$. Første brug af den udvidede middelværdisætning giver nu

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

hvor $\xi_1 \in]a, x[$. Anden brug af den udvidede middelværdisætning giver

$$\frac{h'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{h'(\xi_1) - h'(a)}{g'(\xi_1) - g'(a)} = \frac{h''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$$

hvor $\xi_2 \in]a, \xi_1[$. Sådan kan fortsættes. Idet $g^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ for alle t får vi til sidst får vi

$$\frac{h^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{h^{(n)}(\xi_n) - h^{(n)}(a)}{g^{(n)}(\xi_n) - g^{(n)}(a)} = \frac{h^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

hvor vi altså har $a < \xi_{n+1} < \xi_n < ... < \xi_2 < \xi_1 < x$. Vi har nu vist, at

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

d.v.s. $h(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) g(x)$, altså $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1})(x - a)^{n+1}$. Med $\xi = \xi_{n+1}$ er sætningen vist.

Bevis nummer 2. Dette bevis benytter ikke den udvidede middelværdisætning. Betragt for fastholdt x funktionen g givet ved

$$g(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 + \frac{1}{3!} f'''(t)(x-t)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n$$

$g(t)$ er altså det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt t. Vi finder $g'(t)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{1}{2} f'''(t)(x-t)^2 - f''(t)(x-t) + \frac{1}{3!} f^{(4)}(t)(x-t)^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} f'''(t)(x-t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \end{aligned}$$

Denne sum er "teleskoperende": Vi får blot

$$g'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

Ved integration heraf fås, idet $g(x) = f(x)$ og $g(a) = P_n(x)$, at

$$f(x) - P_n(x) = g(x) - g(a) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

Altså har vi

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

Dette resultat er *Taylors formel med integralrestled.* For herfra at få resultatet med Lagrange's restled skal vi bruge følgende lemma:

Lemma 366 *Lad g og h være kontinuerte funktioner. Antag, at g ikke skifter fortegn på intervallet $[a,b]$. Så eksisterer der et tal $\xi \in [a,b]$, så*

$$\int_a^b h(t)\, g(t)\, dt = h(\xi) \int_a^b g(t)\, dt$$

■

Bevis. Vi behøver kun at betragte tilfældet $g(t) \geq 0$ for alle $t \in [a,b]$ (men ikke identisk nul). Vi har

$$h_{\min} \int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b h(t)\, g(t)\, dt \leq h_{\max} \int_a^b g(t)\, dt$$

Hvoraf følger

$$h_{\min} \leq \frac{\int_a^b h(t)\, g(t)\, dt}{\int_a^b g(t)\, dt} \leq h_{\max}$$

Da h er kontinuert, antager den på intervallet $[a,b]$ enhver værdi mellem sin størsteværdi $h_{\max}$ og sin mindsteværdi $h_{\min}$. Altså findes der et tal $\xi \in [a,b]$, så

$$h(\xi) = \frac{\int_a^b h(t)\, g(t)\, dt}{\int_a^b g(t)\, dt}$$

Vi kan nu udnytte dette lemma på integralrestleddet (idet vi dog tilføjer forudsætningen, at $f^{(n+1)}$ er kontinuert):

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\, dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-a)^{n+1}$$

■

Bemærkning 367 *Det $(n-1)$'te Taylorpolynomium for den afledede f' er lig med den afledede af det n'te Taylorpolynomium for f. Ved differentiation af*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

fås nemlig

$$P_n'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + ... + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}$$

men det er jo netop det $(n-1)$'te Taylorpolynomium for f'

Følgende nyttige resultat kan ofte benyttes i stedet for en direkte vurdering af restleddet i Taylors formel:

Sætning 368 ***(Max-fejl-sætningen)*** *Antag, at f er $n+1$ gange differentiabel i et lukket interval I, der indeholder a som et indre punkt. Lad P_n være det n'te Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt a. Da gælder, at hvis $f^{(n+1)}$ ikke skifter fortegn andre steder i I end eventuelt i a, så vokser afvigelsen $|f(x) - P_n(x)|$ med $|x-a|$, og antager altså sin størsteværdi i et af endepunkterne af intervallet I.*

Bevis. Ifølge bemærkningen ovenfor er P_n' det $(n-1)$'te Taylorpolynomium for f'. Med $h(x) = f(x) - P_n(x)$ har vi derfor ifølge Taylors sætning anvendt på f', at der findes et tal ξ_1 mellem a og x, så

$$h'(x) = f'(x) - P_n'(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^n$$

Heraf følger med vores antagelse om $f^{(n+1)}$, at $h'(x)$ ikke ændrer fortegn andre steder end eventuelt i a. Derfor er h svagt monoton til venstre for a og svagt monoton til højre for a. (En funktion h er svagt voksende, hvis $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$). Heraf følger påstanden. ■

14.1.1 Anvendelser af Taylorpolynomier

Approksimation af en funktion f ved Taylorpolynomier bruges specielt i tilfælde, hvor funktionen ikke er særlig godt kendt, men hvor de afledede i et givet punkt a er kendte (eller lette at bestemme). Vi begynder med et simpelt eksempel.

Eksempel 369 *Vi vil vurdere den fejl, der begås ved at erstatte* $\sin x$ *med dets fjerde Taylorpolynomium* $P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ *(med udviklingspunkt* 0*), når* $|x| \leq \frac{1}{2}$*. Vi har, når* $f(x) = \sin x$*, at* $f^{(5)}(x) = \cos x$*. Derfor har vi med et* ξ *mellem* x *og* 0*, at*

$$\begin{aligned} |\sin x - P_4(x)| &= \left| \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi) x^5 \right| = \left| \frac{1}{5!} \cos(\xi) x^5 \right| \\ &= \frac{1}{5!} |\cos(\xi)| |x|^5 \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{3840} \cong 2.6 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

hvor vi har brugt, at $|\cos(\xi)| \leq 1$*. Er vi tilfredse med* 3 *decimaler i resultatet, kan vi altså ersttte* $\sin x$ *med* $x - \frac{x^3}{3!}$*, når* $|x| \leq \frac{1}{2}$*. Eksempelvis finder vi* $\sin 0.5 = 0.47943$ *og* $P_4(0.5) = P_3(0.5) = 0.47917$*.*

Eksempel 370 *Vi vil bestemme det 3. Taylorpolynomium* P_3 *med udviklingspunkt 0 for* arcsin *og vurdere den fejl, der begås ved at erstatte* $\arcsin x$ *med* $P_3(x)$*, når* $|x| \leq \frac{1}{2}$*. Med* $f = \arcsin$ *finder vi*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} \\ f^{(4)}(x) &= 9x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 15x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}} = \frac{3x\left(2x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Hermed har vi $f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1$, *således at*

$$P_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3$$

En øvre grænse for den fejl, der begås ved at erstatte $\arcsin x$ *med* $P_3(x)$, *når* $|x| \leq \frac{1}{2}$, *kan findes som følger*

$$\begin{aligned} |f(x) - P_3(x)| &= \left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\,x^4\right| = \left|\frac{1}{4!}\frac{3\xi\left(2\xi^2+3\right)}{\left(1-\xi^2\right)^{\frac{7}{2}}}x^4\right| \\ &\leq \frac{1}{4!}\frac{3\cdot\frac{1}{2}\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cong 3.7\times 10^{-2} \end{aligned}$$

Det kan bemærkes, at den faktiske maksimale fejl er ca. 3×10^{-3}, *altså betydeligt mindre! Ved udelukkende at bruge det i Taylors sætning givne restledsudtryk er det umuligt at give en bedre vurdering end den vi gav. I dette eksempel kan vi imidlertid bemærke, at* $f^{(4)}(x) \neq 0$ *for alle* $x \neq 0$. *Af max-fejl-sætningen ovenfor følger derfor, at* $|f(x) - P_3(x)|$ *er størst for* $x = \pm\frac{1}{2}$. *Værdien er* $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \cong 0.002765$ *altså ca.* 3×10^{-3}.

Eksempel 371 *Løsningen til differentialligningen*

$$y'(t) = t^2 + y(t)^2$$

med begyndelsesværdien $y(0) = 1$, *kan faktisk findes eksakt, men løsningen må udtrykkes v.hj.a. såkaldte Besselfunktioner* J_ν *og* Y_ν *samt ved brug af gammafunktionen* Γ. *Løsningen (som er fundet ved hjælp af Maple) ser indviklet ud:*

$$y(t) = -\frac{t\left(\left(sgn(t)\pi - \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + Y_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}{\left(sgn(t)\pi - \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

(Den løsning, som Maple selv giver, har kun π *ikke* $sgn(t)\pi$. *Maple's løsning er så kun korrekt for* $t \geq 0$.*) Imidlertid er det let (uden kendskab til den eksakte løsning) at bestemme ligeså mange afledede af løsningen i* $t = 0$, *som man lyster. Altså kan man let bestemme Taylorpolynomier for* y *udfra punktet* 0. *Vi viser, hvordan de afledede for* $t = 0$ *kan bestemmes direkte udfra differentialligningen og begyndelsesbetingelsen.*

Ved indsættelse af $t = 0$ *i* $y'(t) = t^2 + y(t)^2$ *fås* $y'(0) = 0^2 + y(0)^2 = 1$, *da* $y(0) = 1$. *Differentiér nu differentialligningen. Vi finder*

$$y''(t) = 2t + 2y(t)y'(t)$$

Indsættelse af $t = 0$ *giver* $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2y(0)y'(0) = 2$. *Differentiér én gang til. Vi finder*

$$y'''(t) = 2 + 2y'(t)y'(t) + 2y(t)y''(t) = 2 + 2y'(t)^2 + 2y(t)y''(t)$$

Indsættelse af $t = 0$ giver $y'''(0) = 2 + 2y'(0)^2 + 2y(0)y''(0) = 8$. Differentieres endnu engang, fås

$$y^{(4)}(t) = 4y'(t)y''(t) + 2y'(t)y''(t) + 2y(t)y'''(t) = 6y'(t)y''(t) + 2y(t)y'''(t)$$

Indsættelse af $t = 0$ giver $y^{(4)}(0) = 6y'(0)y''(0) + 2y(0)y'''(0) = 12 + 16 = 28$. Man kunne fortsætte, men vi standser her. Vi kan nu nedskrive det fjerde Taylorpolynomium P_4 for løsningen y til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= t^2 + y(t)^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Vi finder

$$\begin{aligned} P_4(t) &= y(0) + y'(0)t + \frac{1}{2}y''(0)t^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)t^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)t^4 \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}2t^2 + \frac{1}{3!}8t^3 + \frac{1}{4!}28t^4 = 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{6}t^4. \end{aligned}$$

Det ses let, at den femte afledede $y^{(5)}(t)$ nødvendigvis må være positiv. Derfor følger af max-fejl-sætningen, at afvigelsen $|y(t) - P_4(t)|$ vokser med $|t|$.

Eksempel 372 *Lad f være den funktion, der er givet ved forskriften*

$$f(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$$

Funktionen er altså givet ved et integral. Dette integral kan imidlertid ikke udtrykkes v.hj.a. det sædvanlige repertoire af funktioner kendte af alle og enhver. Ikke engang Maple kan udtrykke integralet ved brug af dets ret omfattende repertoire af funktioner. Ikke desto mindre er der ingen tvivl om at $f(x)$ er særdeles veldefineret for ethvert $x \in R$. Integranden $e^{\sin t}$ er jo en kontinuert funktion af t. Den har altså en stamfunktion, og f er netop en sådan. Med andre ord vi har

$$f'(x) = e^{\sin x}$$

Foruden at opfylde denne ligning opfylder f åbenbart også betingelsen $f(0) = 0$. Vi er nu i realiteten i samme situation som i eksemplet ovenfor. Vi har en funktion, der opfylder en differentialligning (denne gang af en meget simpel art) og en begyndelsesbetingelse. Vi kan da let finde Taylorpolynomier med udviklingspunkt 0. Vi vil bestemme det 3. Taylorpolynomium P_3 samt vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$, når $|x| \le \frac{\pi}{6}$. Vi skal dermed udregne de første 4 afledede af f. Vi finder

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\sin x} \cos x \\ f'''(x) &= e^{\sin x} \left(-\sin x + \cos^2 x\right) \\ f^{(4)}(x) &= e^{\sin x} \cos x \sin x \,(3 - \sin x) \end{aligned}$$

Hermed fås

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1$$

Således har vi

$$P_3(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

For at vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$, når $|x| \leq \frac{\pi}{6}$, skal vi vurdere restleddet i Taylors formel Først finder vi, for et tal ξ mellem 0 *og x:*

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_3(x)| &= |R_3(x)| = \left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\,x^4\right| \\
&= \left|\frac{1}{4!}e^{\sin\xi}\cos\xi\sin\xi\,(3-\sin\xi)\,x^4\right| \\
&= \frac{1}{4!}e^{\sin\xi}\,|\cos\xi|\,|\sin\xi|\,|3-\sin\xi|\,x^4
\end{aligned}$$

I vurderingen vil vi nu bruge trekantsuligheden $|a+b| \leq |a| + |b|$, derefter udnytte, at $|\sin\xi| \leq \frac{1}{2}$ og $|\cos\xi| \leq 1$. Vi finder

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_5(x)| &\leq \frac{1}{4!}e^{\sin\xi}\,|\cos\xi|\,|\sin\xi|\,(3+|\sin\xi|)\,x^4 \\
&\leq \frac{1}{4!}e^{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \\
&\cong 0.9\,035\,8\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

Vi kan altså garantere, at den fejl der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$ allerhøjst er 0.9×10^{-2}, men den er formodentlig en del lavere. Vurderingen kan afhænge meget af den form den afledede har. Vi kan lave en lidt bedre vurdering ved at omskrive den 4. afledede ved brug af formlen $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$f^{(4)}(x) = e^{\sin x}\cos x\sin x\,(3-\sin x) = \frac{1}{2}e^{\sin x}\sin 2x\,(3-\sin x)$$

Hermed finder vi den forbedrede vurdering

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_3(x)| &\leq \frac{1}{4!}\frac{1}{2}e^{\sin\xi}\,|\sin 2\xi|\,(3+|\sin\xi|)\,x^4 \\
&\leq \frac{1}{4!}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(3+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \\
&\cong 7.\,825\,3\times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Vi kan således forbedre garantien: Den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_3(x)$ er allerhøjst 0.78×10^{-2}, men den er stadig formodentligt en del lavere. Lader man Maple tegne forskellen mellem f og P_3 på intervallet $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, vil man se, at den største forskel er ca. 1.2×10^{-3}. Den maksimale fejl findes i et af endepunkterne i overensstemmelse med max-fejl-sætningen, idet $f^{(4)}(x) = e^{\sin x}\cos x\sin x\,(3-\sin x)$ ikke skifter fortegn andre steder end i udviklingspunktet 0.

Eksempel 373 *Antag, at det vides, at en funktion f opfylder ligningen*

$$f(x)^3 + f(x) + 5x - 5 = 0 \tag{*}$$

for alle $x \in R$. Vi vil egentlig gerne løse ligningen for $f(x)$. Dette kan da også godt lade sig gøre (prøv med Maple!), idet der er formler til bestemmelse af rødderne til polynomier af grad op til og med 4. Der er tre løsninger til vores ligning. De er alle ret grimme. Én af løsningerne er reel. Ifølge Maple ser den således ud

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}\sqrt[3]{540\,(1-x) + 12\sqrt{2037 - 4050x + 2025x^2}} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt[3]{540\,(1-x) + 12\sqrt{2037 - 4050x + 2025x^2}}} \end{aligned}$$

Dennes 3.Taylorpolynomium P_3 med udviklingspunkt 1 vil vi bestemme. Vi agter ikke at bruge dette eksplicitte udtryk for løsningen, men derimod ligning (*). Vi udnytter, at det kan vises, at der for ethvert $x \in R$ er præcis én reel løsning $f(x)$ til trediegradsligningen (*). Det ses ved indsættelse af $x = 1$, at $f(1)$ må opfylde ligningen $f(1)^3 + f(1) = 0$. Denne ligning har den reelle løsning $f(1) = 0$. Ved differentiation af ligning (*) fås

$$3f(x)^2 f'(x) + f'(x) + 5 = 0 \tag{**}$$

altså opfylder f differentialligningen

$$f'(x) = -\frac{5}{1 + 3f(x)^2} \tag{**2}$$

Da vi også kender begyndelsesværdien for f, er vi nu i samme situation som tidligere. Vi finder umiddelbart, at $f'(1) = -5$. Ved differentiation af ligning (**) fås

$$6f(x)f'(x)^2 + 3f(x)^2 f''(x) + f''(x) = 0 \tag{***}$$

*Indsættelse af $x = 1$ giver, at $f''(1) = 0$. Vi kunne i stedet have differentieret ligning (**2), men foretrak at undgå brøker. Ved differentiation af ligning (***) fås*

$$6f'(x)^3 + 18f(x)f'(x)f''(x) + 3f(x)^2 f'''(x) + f'''(x) = 0$$

Indsættelse af $x = 1$ giver, at $f'''(1) = 750$. Hermed har vi

$$P_3(x) = -5\,(x-1) + 125\,(x-1)^3$$

14.2 Taylorrækker

Lad f være vilkårligt ofte differentiabel i et interval omkring punktet a. Det n'te Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt a for f er som set ovenfor givet ved

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^n \end{aligned}$$

og ifølge Taylors sætning har vi, at der til ethvert givet x findes et tal ξ mellem x og a, så

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Her er $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ *restleddet* i Taylors sætning. Hvis nu det viser sig, at $R_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$, så har vi altså, at $P_n(x) \to f(x)$ for $n \to \infty$. Hvis dette er tilfældet, vil vi skrive

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^n$$

En sådan sum bestående af uendeligt mange led vil vi kalde en uendelig række (engelsk: *infinite series*).

Eksempel 374 *Udtrykket*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots$$

er en uendelig række. Der gælder for ethvert $n \geq 0$, at

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Altså ser vi, at

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \to 2$$

for $n \to \infty$. Vi skriver derfor

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

Eksempel 375 *Det n'te Taylorpolynomium P_n med udviklingspunkt 0 for eksponentialfunktionen* $\exp$ *blev ovenfor fundet til*

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Vi vil vise, at

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Af Taylors sætning får vi, da den $(n+1)$'te afledede af $\exp$ *er* $\exp$ *selv, at*

$$e^x - P_n(x) = R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1}$$

hvor ξ ligger mellem x og 0. Bemærk, at ξ vil afhænge af både x og n. Hermed har vi, da $\xi \leq |x|$, at

$$|e^x - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{|x|} |x|^{n+1}$$

Vi vil i et lemma nedenfor vise, at

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

for $n \to \infty$. Når det er vist, har vi vist, at $e^x - P_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ og dermed, at $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Lemma 376 *For ethvert postivt tal a gælder, at $\frac{a^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$.*

Bevis. Vælg til det givne a et positivt helt tal m, så $a \leq \frac{1}{2}m$. Sæt $b_n = \frac{a^n}{n!}$. For $n \geq m$ har vi

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a}{n+1} \leq \frac{\frac{1}{2}m}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Ved gentagne brug af denne ulighed fås for alle $p \geq 1$

$$b_{m+p} \leq \frac{1}{2} b_{m+p-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 b_{m+p-2} \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p b_m = 2^{-p} b_m$$

Men af $0 \leq b_{m+p} \leq 2^{-p} b_m$ følger, at $b_{m+p} \to 0$ for $p \to \infty$, hvormed vi også har vist, at $b_n \to 0$ for $n \to \infty$. ■

Bemærkning 377 *På ganske tilsvarende måde kan vises, at $\sin x$ og $\cos x$ er lig med deres Taylorrækker for alle $x \in R$, således at*

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Desuden gælder, at

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

men kun for $x \in \left]-1, 1\right]$. *Det er ikke overraskende, at vi behøver* $x > -1$, *eftersom* $\ln(1+x)$ *jo kun er defineret for* $x > -1$. *Grunden til restriktionen* $x \leq 1$ *er, at den uendelige række på højre side er divergent for* $x > 1$, *d.v.s. at*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

ikke har nogen grænseværdi for $n \to \infty$, *med andre ord: Den uendelige række kan ikke tillægges nogen værdi for* $x > 1$.

14.3 Generelle rækkeudviklinger for funktioner

En Taylorrække for en funktion er en uendelig sum af led af formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Denne rækkes *afsnit*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \ldots + a_n (x-a)^n$$

er polynomier. Når det ikke kan lade sig gøre at skrive en given funktion som en sådan Taylorrække, kan man evt. lede efter en rækkeudvikling, i hvilken forekommer led af andre typer end $a_k (x-a)^k$. F.eks. blot ved også at tillade negative eksponenter, altså negative værdier af k. Sådanne rækker kaldes Laurentrækker.

14.3.1 Laurentrækker

Eksempel 378 *Funktionen* f *defineret ved* $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ *for* $x \neq 0$ *har selvfølgelig ikke nogen Taylorudvikling udfra* 0, *idet funktionen ikke kan defineres i* 0 *uden at den bliver diskontinuert. Funktionen har en singularitet i* 0. *Imidlertid har vi, at funktionen* g *givet ved*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & for \quad x \neq 0 \\ 0 & for \quad x = 0 \end{cases}$$

er vilkårligt ofte differentiabel, og man kan vise, at $g(x)$ *er lig med sin Taylorrække udfra* 0 *for* $|x| < \pi$. *De første led i Taylorudviklingen for* g *er*

$$\frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \frac{73}{3421440}x^9 + \ldots$$

Hermed har vi følgende rækkeudvikling for $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ *(der iøvrigt kaldes cosecans af* x *og betegnes med* $\csc x$*):*

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \frac{73}{3421440}x^9 + \ldots$$

gældende for $0 < |x| < \pi$.

Eksempel 379 *Der gælder, at* $\arctan x$ *er lig med sin Taylorrække for* $-1 < x \leq 1$*:*

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

For $x > 0$ *har vi, at*

$$\arctan x + \arctan\left(x^{-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Når $x \geq 1$*, gælder at* $0 < x^{-1} \leq 1$*, så vi har*

$$\begin{aligned}\arctan x &= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(x^{-1}\right)^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-2k-1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} - \frac{x^{-5}}{5} + \frac{x^{-7}}{7} + \ldots\end{aligned}$$

14.3.2 Fourierrækker

For en periodisk funktion f kan det undertiden være nyttigt at have den omskrevet til en sum af sinus- og cosinus-funktioner. Der gælder herom følgende sætning.

Sætning 380 *Lad* f *være en stykkevis kontinuert og stykkevis differentiabel periodisk funktion med periode* 2π*. Så gælder, hvis* f *er kontinuert i* x*, at*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

hvor koefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx\end{aligned}$$

I et punkt a*, i hvilket* f *har en diskontinuitet, gælder i stedet, at rækkens sum er* $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\uparrow a} f(x) + \lim_{x\downarrow a} f(x)\right)$.

Eksempel 381 *Den periodiske funktion* f *med periode* 2π*, der på intervallet* $]-\pi,\pi]$ *er givet ved* $f(x) = x(\pi - x)$*, har følgende Fourierrække*

$$-\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx + \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Funktionsværdien $f(x)$ *er lig med Fourierrækkens værdi for* $x \neq (2k+1)\pi, k \in Z$*.*